PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 13 — 1. Juli 1930 — Redaktionsschluß für Nr. 15 am 10. Juli 1930. — 31. Jahrgang

INHALT:

Originalmitteilungen:

H. Benndorf, Über die Bewegung fester Körper in einer Flüssigkeit mit Reibung. S. 593.

K. F. Niessen, Über den Atomabstand in Kristallen tetraedrischer Struktur. S. 610.

H. A. Stuart, Über die Temperaturabhängigkeit der Kerrkonstanten von Gasen und die Ergebnisse bei Methyl- und Äthylalkohol. S. 616.

K. Haberl, Auflösungsvermögen und Öffnungsverhältnis eines Objektives. Mit Tafel X. S. 618.

S. Suzuki, Die obere Grenze der Energiedichte und einige thermodynamischen Schlußfolgerungen. S. 618.

R. Heilbrun u. A. Makower, Über Strobaesthesie. Mit Tafel XI. S. 623.

Zusammenfassende Berichte:

H. Kühlewein, Die Legierungen des ternären Systems Eisen—Nickel—Kobalt. S. 626.

Besprechungen:

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil I. S. 640.

Berichtigung. S. 640.

Personalien. S. 640.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Bewegung fester Körper in einer Flüssigkeit mit Reibung.

Von H. Benndorf.

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Graz, Nr. 72.

I. Kritik der Exnerschen Widerstandstheorie[1]).

§ 1. F. M. Exner hat in einer Abhandlung, die den Titel führt „Energiegleichung zur Berechnung des Widerstandes und der Fallgeschwindigkeit von Steinen im Wasser[2])", den Versuch gemacht, eine neue einfache Theorie des Bewegungswiderstandes von Körpern in einer Flüssigkeit zu geben.

Diese Theorie zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

1. Ist sie überraschend einfach; denn durch eine ganz rohe Energiebilanz wird in wenigen Zeilen das Widerstandsgesetz abgeleitet.

2. Stimmt sie in Anbetracht der rohen Abschätzung der Energieveränderungen in einigen Fällen recht gut mit der Erfahrung.

3. Steht sie in Widerspruch mit den Aussagen der theoretischen Hydrodynamik. Denn wenn Exner seine Betrachtungen auch nur auf reale Flüssigkeiten anwendet, so können sie doch unverändert auf ideale (reibungslose) Flüssigkeiten übertragen werden und führen zu dem Resultat, daß eine sich gleichmäßig bewegende Kugel auch in einer reibungslosen Flüssigkeit einen endlichen Widerstand erfahren muß[1]).

Meiner Ansicht nach ist die dritte der oben genannten Eigenschaften der Exnerschen Theorie ein sicherer Beweis dafür, daß seine Betrachtungsweise unmöglich richtig sein kann. Die Tatsache aber, daß selbst ein Mann wie Exner diesbezüglich anderer Ansicht ist, rechtfertigt es wohl hinreichend, wenn ich in Folgendem den Versuch mache, den etwas verdeckten Irrtum, der ihm, meiner Ansicht nach, bei seinen Überlegungen unterlaufen ist, ausführlicher darzulegen, zumal die Exnersche Arbeit

1) Den ersten Teil der vorliegenden Arbeit hatte ich vor wenigen Wochen mit Zustimmung meines Freundes F. M. Exner an die Redaktion dieser Zeitschrift eingesandt. Kurz darauf entriß ihn uns ganz unerwartet der Tod. Wenige Tage vor seinem Ende hatte ich noch eine mehrstündige Unterredung über den vorliegenden Gegenstand mit ihm, in der er zwar teilweise die Berechtigung meiner Einwände gegen seine Theorie des Widerstandes zugab, aber doch meinte, etwas Richtiges müsse dahinterstecken, da seine Berechnungen zu auffallend gut mit der Erfahrung stimmten.

Jetzt, wo Exner nicht mehr selbst das Wort in dieser Sache ergreifen kann, widerstrebt es mir, nur mit einer rein negativen Kritik an die Öffentlichkeit zu treten; ich habe daher einen zweiten Teil angefügt, in dem ich an einem Beispiel zu zeigen versuche, wie sich Fragen solcher Art, wie sie Exner behandeln wollte, auf Grund empirischer Daten unter Hinzunahme theoretischer Überlegungen behandeln lassen.

2) Diese Zeitschr. **30**, 458, 1929.

1) Exner selbst ist dieser Widerspruch nicht verborgen geblieben, denn er schreibt darüber l. c.: „Die theoretische Berechnung ist sehr einfach, aber mit der alten und immer wiederkehrenden hydrodynamischen Theorie nicht vereinbar, die besagt, daß eine Kugel, die sich reibungslos in einer Flüssigkeit bewegt, keinen Widerstand erhält. Man hat meist vorausgesetzt, daß der tatsächliche Widerstand, der regelmäßig auftritt, eine Reibungswirkung ist. Ich habe aber den Eindruck, daß die hier benutzte Energiegleichung gegen jene Theorie spricht."

ihrem Titel nach wohl auch von solchen gelesen werden wird, die in der theoretischen Hydrodynamik unbewandert sind.

§ 2. Um mich möglichst kurz fassen zu können, wird es zweckmäßig sein, in Erinnerung zu rufen, was die theoretische Hydrodynamik über die Strömungsverhältnisse einer reibungslosen Flüssigkeit aussagt, durch die ein Körper — der Einfachheit halber wähle ich gleich eine Kugel — mit konstanter Geschwindigkeit bewegt wird.

Wir betrachten also eine unendlich ausgedehnte reibungslose Flüssigkeit, gegenüber der sich eine Kugel vom Radius a horizontal mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_0 bewegt. Wie bewegt sich dabei die Flüssigkeit?

Die Antwort fällt verschieden aus, je nachdem man die Bewegung auf ein Koordinatensystem bezieht, das mit der Kugel fix verbunden ist (Kugelbeobachter) oder auf ein solches, das bezüglich der unendlich entfernten Flüssigkeitspartien ruht (Wasser-Beobachter).

§ 3. Das weitaus einfachere und auch leicht anschaulich zu erfassende Strömungsbild ergibt sich für den Kugelbeobachter. Dieser sagt, die Kugel ruht und um sie herrscht ein stationärer Strömungszustand, dessen Stromlinien durch die Linien der Fig. 1 dargestellt werden. Es ist

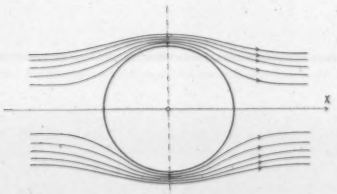

Fig. 1.

eine Potentialströmung, die um die X-Achse symmetrisch verläuft. Die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit in einem Punkte mit den Koordinaten x und ϱ (Abstand von der X-Achse), der die Entfernung $r = \sqrt{x^2 + \varrho^2}$ vom Mittelpunkt der Kugel besitzt, sind

$$u = v_0 \left[\frac{a^3}{2 r^3} - \frac{3}{2} \frac{x^2 a^3}{r^5} \right] + v_0 \qquad (1)$$

parallel der X-Achse

$$v = -\frac{3}{2} v_0 \frac{x \varrho a^3}{r^5} \qquad (2)$$

senkrecht zur X-Achse, in einer durch sie gehenden Ebene.

Da die Stromlinien auch bezüglich einer Ebene, die senkrecht auf die X-Achse durch den Kugelmittelpunkt gelegt ist, spiegelbildlich verlaufen, heben sich die von der Flüssigkeit auf die Kugel ausgeübten Drucke gegenseitig auf; die Kugel erfährt in der Flüssigkeit keinen Widerstand.

Die Stromlinien sind identisch mit den Kraftlinien eines elektrostatischen Feldes, das entstanden ist aus dem Felde eines Dipols vom Momente $m = \frac{a^3}{2} v_0$, der achsenparallel in ein homogenes Feld der Stärke $\mathfrak{E} = v_0$ eingebettet ist.

§ 4. Der Strömungszustand der Flüssigkeit, wie er sich dem Wasserbeobachter darstellt, ist aus Fig. 2 zu entnehmen. Die eingezeichneten Feldlinien des Strömungsfeldes sind mit der

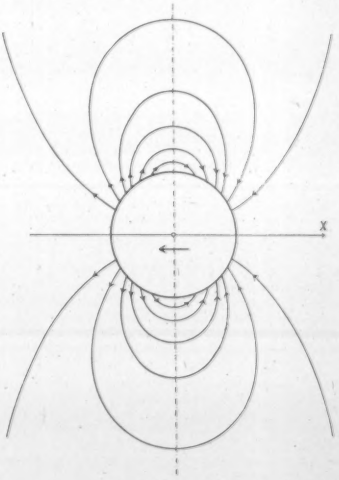

Fig. 2.

Kugel fix verbunden zu denken. Sie stellen jetzt zwar nicht mehr Stromlinien der Flüssigkeitsteilchen vor, geben aber in jedem Augenblick die Richtung und — durch ihren Abstand — die Größe der jeweiligen Geschwindigkeit an.

In dem Augenblick, in dem die Kugel den Ursprung des Koordinatensystems passiert, sind die Geschwindigkeitskomponenten durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$u = v_0 \left[\frac{a^3}{2 r^3} - \frac{3}{2} \frac{x^2 a^3}{r^5} \right] \qquad (3)$$

$$v = -\frac{3}{2} v_0 \frac{x \varrho a^3}{r^5}. \qquad (4)$$

Das elektrostatische Analogon ist ein gleichförmig bewegter Dipol, der seine Feldlinien mit sich führt.

Für den Wasserbeobachter besteht also eine Strömung der gesamten Flüssigkeit jeweils von dem vorderen Teil der Kugel nach rückwärts. Die gesamte kinetische Energie der Flüssigkeit hat die Größe

$$E = \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right)\varrho v_0^2 = \frac{1}{4} V \varrho v_0^2 \qquad (5)$$

(V Kugelvolumen, ϱ Dichte der Flüssigkeit),

wie man leicht durch Integration über den Gesamtraum außerhalb der Kugel finden kann. Es ergibt sich so das einfache Resultat, daß die kinetische Energie der Strömung so groß ist, wie die halbe kinetische Energie einer Flüssigkeitskugel vom Radius a und der Geschwindigkeit v_0. Diese Energie ist zeitlich konstant und wird nur zu verschiedenen Zeiten von verschiedenen Teilen der Flüssigkeit getragen; der Bewegungszustand der Flüssigkeit wandert von rechts nach links, indem hinter der Kugel die Flüssigkeit allmählich zur Ruhe kommt, vor ihr immer neue Partien der Flüssigkeit in Bewegung gesetzt werden. Da sich somit die Gesamtenergie des Systems nicht ändert, kommt auch der Wasserbeobachter zu dem Resultat, daß die Kugel keinen Widerstand erfährt.

§ 5. Nun wollen wir die Betrachtungsweise Exners auf eine horizontal bewegte Kugel anwenden. Wir knüpfen dabei an Fig. 3 an.

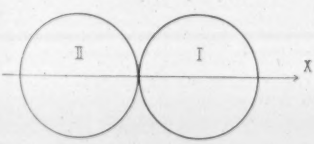

Fig. 3.

In einem Zeitpunkt sei die Kugel in der Lage I und habe die Geschwindigkeit $u = -v_0$; nach einer gewissen Zeit hat die Kugel den Weg $2a$ zurückgelegt und befindet sich in II. Während dieser Zeit ist, so schließt Exner, die Flüssigkeit aus dem Raume II verdrängt worden und in den Raum I geströmt. Diese Strömung ist mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit $v_m = \varepsilon v_0$ erfolgt, die unbedingt größer als v_0 sein muß, da die Flüssigkeitsteilchen ja den Umweg um die Kugel machen müssen. Es hat also eine Flüssigkeitsmasse $V \cdot \varrho$, die anfänglich in Ruhe war, die mittlere Geschwindigkeit v_m erhalten, weshalb die kinetische Energie der Flüssigkeit um den Betrag $\frac{1}{2}\varrho V v_m^2$ gewachsen ist, der in der wirklichen Flüssigkeit sich durch Reibung allmählich in Wärme verwandelt, in der reibungslosen Flüssigkeit aber erhalten bleibt.

Da also die kinetische Energie der Flüssigkeit einen Zuwachs erfahren hat, so kann dieser, wenn auf die Kugel keine äußeren Kräfte wirken, nur auf Kosten der kinetischen Energie der bewegten Kugel erfolgt sein, oder, wenn die Kugel sich gleichmäßig bewegt, muß eine äußere Kraft auf sie gewirkt haben, d. h. mit anderen Worten, die Kugel hat in der Flüssigkeit einen Widerstand erfahren. Die Größe des mittleren Widerstandes auf der Strecke von I nach II ergibt sich aus der Gleichung

$$W \cdot 2a = \tfrac{1}{2} V \varrho v_m^2 , \qquad (6)$$

woraus sich

$$W = \frac{1}{3}\pi a^2 \varrho v_m^2 = \frac{2}{3}\varepsilon^2 \pi a^2 \frac{\varrho v_0^2}{2} \qquad (7)$$

berechnet.

Schreibt man den Ausdruck für den Flüssigkeitswiderstand in der üblichen Form $W = \frac{c F \varrho v_0^2}{2}$ (F größter Querschnitt), so ergibt sich für die Widerstandszahl $c = \frac{2\varepsilon^2}{1{,}3}$.

Um nun einen angenäherten Wert für ε zu finden, schließt Exner folgendermaßen: Der größere Teil der Flüssigkeit strömt unmittelbar um die Kugel herum. Die Flüssigkeitsteilchen haben also einen Weg $a\pi$ zurückgelegt, in der Zeit, während der die Kugel den Weg $2a$ zurückgelegt hat. Es verhält sich also angenähert $v_m : v_0 = a\pi : 2a$, d. h. es wird $\varepsilon = \frac{\pi}{2} = 1{,}57$, woraus sich für $c = \frac{2\varepsilon^2}{3} = 1{,}6$ ergibt, eine Widerstandszahl, die für eine Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R} = 21$ genau mit den Resultaten der Beobachtung stimmt, für benachbarte Reynoldssche Zahlen angenähert gilt.

§ 6. Wenden wir nun diese Betrachtungsweise auf eine reibungslose Flüssigkeit an, so folgt ein Widerstand für die bewegte Kugel von der Größe $W = 0{,}8\,\pi a^2 \varrho v_0^2$, was im vollen Widerspruch mit den Aussagen der Theorie steht. Fragt man sich nun, wo der Fehlschluß Exners liegt, so läßt er sich vielleicht am kürzesten in folgender Weise klarlegen.

Exner stellt seine Energiebilanz vom Standpunkte des Wasserbeobachters an, die Flüssigkeit als Ganzes ruht und die Kugel erteilt der Flüssigkeit pro Zeiteinheit einen Zuwachs an kinetischer Energie. Zur Berechnung des Zuwachses an kinetischer Energie verwendet aber Exner nicht das Strömungsfeld, wie es sich einem Wasserbeobachter darstellt, sondern einen Strömungszustand, wie er sich angenähert einem Kugelbeobachter ergeben würde.

Nach Exner ruht das Wasser vor der Kugel, strömt knapp um sie herum und gelangt mit einem Betrag an kinetischer Energie behaftet, in den Raum hinter sie, während in Wirklichkeit bei einer idealen Flüssigkeit die ganze Wassermasse dauernd um die Kugel in Bewegung ist und sie in großen Bogen umströmt.

Korrekterweise hätte Exner einen Strömungszustand annehmen müssen, wie er einem Wasserbeobachter erscheint. Hätte er dies getan, so hätte sich für eine ideale Flüssigkeit der Widerstand Null ergeben und für eine wirkliche Flüssigkeit hätte er die Betrachtung nicht durchführen können, ohne spezielle, aus der Erfahrung zu entnehmende Kenntnisse über die Wirbelbildung hinter der Kugel.

Es erscheint mir also die Betrachtungsweise Exners mit einem prinzipiellen Fehler behaftet, der es unstatthaft erscheinen läßt, sie, zu wenn auch noch so rohen Abschätzungen, zu verwenden.

§ 7. Zum Schlusse wollen wir noch untersuchen, worauf es beruht, daß Exner zu einer Widerstandszahl gelangt ist, die recht gut mit der Erfahrung stimmt. Ist dies ein reiner Zufall?

Zunächst muß folgendes festgestellt werden. Erfahrungsgemäß erfährt eine Kugel in einer wirklichen Flüssigkeit einen Widerstand von der Größe $W = c F \frac{\varrho v_0^2}{2}$, wobei die Widerstandszahl c von der Reynoldsschen Zahl abhängig ist, wie aus folgenden Zahlen, die dem Artikel von L. Prandtl, Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik, 11. Aufl., I. Bd., S. 1146 entnommen sind, hervorgeht:

$\Re = \frac{a v_0}{\nu} =$	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
c etwa	120	14	2,6	0,75	0,42	0,45	0,44	0,18

Nehmen wir z. B. $\Re = 100$, so wird $c = 0{,}8$. Die Arbeit, die von der äußeren Kraft geleistet wird, wenn die Kugel um die Strecke $2a$ mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt wird, ist

$$A = W \cdot 2a = 0{,}8\, a^3 \pi \varrho v_0^2 = 2{,}4 \left[\frac{V \varrho v_0^2}{4}\right]. \quad (8)$$

Sie mißt den Energiezuwachs, den die Flüssigkeit durch Ausbildung von Wirbeln erfahren hat.

Exner gelangt zu der Formel $A = 2\varepsilon^2 \left[\frac{V \varrho v_0^2}{4}\right]$

und setzt $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, daher $2\varepsilon^2 = 5{,}0$.

Daß die Zahlenwerte sich von derselben Größenordnung ergeben, hängt vermutlich mit der Tatsache zusammen, daß die kinetische Energie der Flüssigkeit, in der sich eine Kugel mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt, für eine reibungslose Flüssigkeit die Größenordnung $\frac{1}{4} V \varrho v_0^2$ hat.

Zum Schlusse möchte ich noch ausdrücklich bemerken, daß die praktischen Folgerungen, zu denen Exner bezüglich des Fallens von Steinen und Sand in Wasser gelangt, überall dort der Größenordnung nach richtig bleiben, wo das von ihm berechnete ε zu Zahlenwerten von c führt, die mit den für die betreffende Reynoldssche Zahl experimentell ermittelten Werten von c genügend übereinstimmen.

II. Bewegung von Kugeln in Flüssigkeiten.

A. Bewegungsgleichung.

§ 8. In diesem zweiten Teil will ich zu zeigen versuchen, wie sich Fragen solcher Art, wie sie Exner behandeln wollte, auf Grund empirischer Daten unter Hinzunahme theoretischer Überlegungen behandeln lassen.

Als Beispiel will ich im folgenden einige Fragen über die Bewegung von Kugeln in Flüssigkeiten behandeln, die von einigem praktischen Interesse sind. Es wird daraus zu ersehen sein, wie man analog die Bewegungen von Körpern anderer Form behandeln kann.

Da es keine theoretischen Formeln für den Kugelwiderstand gibt, sobald man den Gültigkeitsbereich der Stokes-Oseenschen Formeln überschreitet, müssen sich die Berechnungen auf empirische Daten stützen. Ich verwende dazu das ziemlich umfangreiche Material, das über Widerstandsmessungen an Kugeln vorliegt[1]).

Die Hydrodynamiker pflegen den Widerstand W, den ein mit der Geschwindigkeit v in einer Flüssigkeit bewegter Körper erfährt, in der Form $W = c \cdot F \cdot \frac{\varrho v^2}{2}$ anzusetzen, wo F den größten Querschnitt des Körpers, ϱ die Dichte der Flüssigkeit und c die dimensionslose Widerstandszahl bezeichnet, die als Funktion der Reynoldsschen Zahl $\Re$ aus Versuchen ermittelt wird.

Die Werte von c habe ich den Göttinger Messungen aus den Jahren 1923 und 1926 entnommen[1]); sie sind, wie sie sich durch Ausmessung der betreffenden Kurven und nach Umrechnung[2]) ergeben haben, in Tabelle I zusammengestellt.

1) Erg. der Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen, Lief. II, S. 28, 1923. O. Flachsbart, Phys. Zeitschr. **28**, 461, 1927. Für Übersendung einer Photographie der Göttinger Kurve bin ich Herrn Dr. Flachsbart zu Dank verpflichtet.

2) Sehr lästig und zu Irrtümern Anlaß gebend ist der Umstand, daß einige Autoren die Reynoldssche Zahl auf den Durchmesser, andere wieder auf den Radius beziehen. Eine Vereinbarung diesbezüglich wäre sehr wünschenswert.

Tabelle I.

$\Re =$	0,1	1	10	10^2	$5 \cdot 10^2$	10^3	$2 \cdot 10^3$	$2{,}51 \cdot 10^3$	$3{,}16 \cdot 10^3$	$5{,}01 \cdot 10^3$	10^4	$1{,}58 \cdot 10^4$
c	120	14,5	2,56	0,745	0,467	0,420	0,389	0,385	0,385	0,406	0,452	0,473
$Z = c\,\Re^2$	1,2	14,5	$2{,}56 \cdot 10^2$	$7{,}45 \cdot 10^3$	$1{,}17 \cdot 10^5$	$4{,}2 \cdot 10^5$	$1{,}55 \cdot 10^6$	$2{,}43 \cdot 10^6$	$3{,}85 \cdot 10^6$	$1{,}02 \cdot 10^7$	$4{,}52 \cdot 10^7$	$1{,}19 \cdot 10^8$
$\Re =$	$2{,}51 \cdot 10^4$	$3{,}98 \cdot 10^4$	$6{,}31 \cdot 10^4$ *	$7{,}94 \cdot 10^4$ *	10^5 *	$1{,}25 \cdot 10^5$	$1{,}41 \cdot 10^5$	$1{,}58 \cdot 10^5$	$1{,}78 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2{,}24 \cdot 10^5$	
c	0,488	0,490	0,476	0,462	0,432	0,376	0,292	0,126	0,093	0,0891	0,0912	
$Z = c\,\Re^2$	$3{,}08 \cdot 10^8$	$7{,}77 \cdot 10^8$	$1{,}9 \cdot 10^9$	$2{,}92 \cdot 10^9$	$4{,}32 \cdot 10^9$	$5{,}96 \cdot 10^9$	$5{,}82 \cdot 10^9$	$3{,}16 \cdot 10^9$	$2{,}95 \cdot 10^9$	$3{,}55 \cdot 10^9$	$4{,}57 \cdot 10^9$	

Die Werte von c für $\Re < 5 \cdot 10^4$ entsprechen den Göttinger Messungen 1923, für $\Re > 1{,}1 \cdot 10^5$ denen von 1926. Die Werte von c für das Intervall $\Re = 5 \cdot 10^4$ bis $\Re = 1{,}1 \cdot 10^5$ sind von mir interpoliert (in Tabelle I mit * versehen), da die beiden Meßreihen von 1923 und 1926 in diesem Intervall nicht übereinstimmen. Es ist zu vermuten, daß die richtigen c-Werte zwischen $\Re = 10^4$ und $\Re = 10^5$ niedriger liegen als den Werten in Tabelle I entspricht; auch liegt es in der Natur der Sache, daß diesen Zahlen keine sehr große Genauigkeit zukommt. Für die Zwecke dieser Arbeit verschlägt das aber nicht viel, da es mir weniger auf die Gewinnung bestimmter Zahlenwerte, als auf die Darlegung der Methode ankommt.

Als Reynoldssche Zahl verwende ich $\Re = \frac{a \cdot v}{\nu}$

(a = Kugelradius, $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ kinematische Zähigkeit, μ = Koeffizient der inneren Reibung).

§ 9. Wir gehen von der Bewegungsgleichung für die Kugel aus:

$$m \frac{dv}{dt} = P - W, \tag{8}$$

wobei P die als konstant angenommene Kraft, die auf die Kugel von der Masse m wirkt und $W = c \cdot a^2 \pi \cdot \frac{\varrho v^2}{2}$ den Flüssigkeitswiderstand der Kugel bezeichnet; die Widerstandszahl c ist als empirisch gegebene Funktion von $\Re$ anzusehen.

Bei Aufstellung der Bewegungsgleichung ist stillschweigend die Annahme gemacht, daß der Widerstand, den die Kugel bei der nicht stationären Bewegung erfährt, bei gleicher augenblicklicher Geschwindigkeit derselbe sei, wie bei stationärer Bewegung. Diese Annahme ist natürlich nur als ein Notbehelf und als erste Näherung anzusehen, die um so besser zutrifft, je geringer die Beschleunigung der Kugel ist. Es ist damit vorausgesetzt, daß die Ausbildung des zu einer bestimmten Geschwindigkeit der Kugel gehörigen stationären Strömungsfeldes unendlich rasch eintritt, was nur bei einer reibungslosen und absolut inkompressiblen Flüssigkeitsströmung erfüllt ist.

Zunächst können wir der Reynoldsschen Zahl $\Re = \frac{av}{\nu}$ eine anschauliche Bedeutung geben. Der Quotient $\frac{\nu}{a}$ hat die Dimension einer Geschwindigkeit. Wir wollen diese Geschwindigkeit $v_c = \frac{\nu}{a}$, die nur von der kinematischen Zähigkeit und dem Kugelradius abhängt, die „charakteristische Geschwindigkeit" der betrachteten Kugel in der betrachteten Flüssigkeit nennen. Die Werte von ν in Tabelle II geben die Werte von v_c für Kugeln vom Radius 1 cm.

Tabelle II.

Substanz		Dichte ϱ $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$	Reibungskoeffizient μ $\left[\frac{g}{cm\,sec}\right]$	Kinematische Zähigkeit $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ $\left[\frac{cm^2}{sec}\right]$	Charakteristischer Widerstand $w_c = \frac{\pi}{2}\frac{\mu^2}{\varrho}$ in 10^{-6} Dyn
H_2O	0°	1,00	$17{,}9 \cdot 10^{-3}$	$17{,}9 \cdot 10^{-3}$	538
	20°	1,00	$10{,}0 \cdot 10^{-3}$	$10{,}0 \cdot 10^{-3}$	157
	50°	0,99	$5{,}50 \cdot 10^{-3}$	$5{,}56 \cdot 10^{-3}$	49,6
	100°	0,96	$2{,}82 \cdot 10^{-3}$	$2{,}94 \cdot 10^{-3}$	13,0
Hg	0°	13,6	$16{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}24 \cdot 10^{-3}$	32,5
	100°	13,6	$12{,}3 \cdot 10^{-3}$	$0{,}91 \cdot 10^{-3}$	17,4
Glyzerin	18°	1,26	10,7	8,5	$142 \cdot 10^6$
Luft	0°, 760 mm	$129 \cdot 10^{-5}$	$1{,}72 \cdot 10^{-4}$	$1{,}33 \cdot 10^{-1}$	36,0
	100°, 760 mm	$94 \cdot 10^{-5}$	$2{,}12 \cdot 10^{-4}$	$2{,}25 \cdot 10^{-1}$	75,0
	0°, 7,6 mm	$1{,}29 \cdot 10^{-5}$	$1{,}72 \cdot 10^{-4}$	$133 \cdot 10^{-1}$	3600

Eine Kugel, die sich in einer Flüssigkeit, etwa vom Ruhezustand aus zu bewegen beginnt, durchläuft die Reihe der Reynoldsschen Zahlen mit Null beginnend. In jedem Zeitpunkt entspricht dem jeweiligen Bewegungszustand der Kugel eine bestimmte Reynoldssche Zahl $\Re = \frac{v}{v_c}$.

Wir könnendah er sagen, die Reynoldssche Zahl gibt an, um wieviel mal größer die augenblickliche Geschwindigkeit der Kugel ist als ihre charakteristische Geschwindigkeit. Wir nennen daher $\Re$ auch kurz „reduzierte Geschwindigkeit".

Drücken wir in der Formel für den Widerstand v^2 durch die Reynoldssche Zahl aus, so wird:

$$W = \frac{\nu^2 \pi \varrho}{2} \cdot c \Re^2 = w_c \cdot Z(\Re), \qquad (9)$$

wobei $\frac{\nu^2 \pi \varrho}{2}$, das die Dimension einer Kraft hat, mit w_c und das Produkt $c \cdot \Re^2$, das dimensionslos ist, mit $Z(\Re)$ bezeichnet wird. Z, das nur eine Funktion von $\Re$ ist, heiße Widerstandsfunktion.

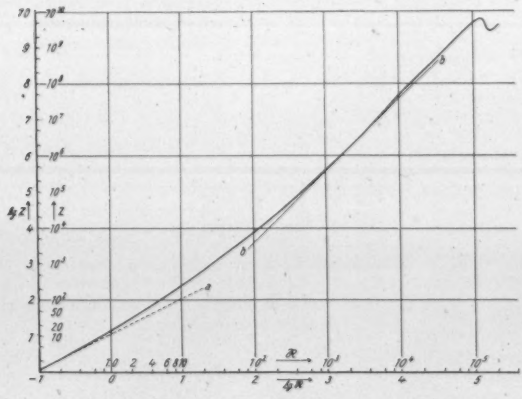

Fig. 4.

Tabelle I enthält die Werte von Z für verschiedene $\Re$ und Fig. 4 stellt lg Z als Funktion von lg $\Re$ graphisch dar.

Die Größe $w_c = \frac{\pi}{2} \nu^2 \varrho = \frac{\pi}{2} \frac{\mu^2}{\varrho}$ hängt nur von Flüssigkeitskonstanten ab[1]), ist also für eine gegebene Flüssigkeit konstant und für sie charakteristisch. Wir nennen sie den „charakteristischen Widerstand" der Flüssigkeit. Die Werte von w_c in Mikrodynen sind aus Tabelle II zu entnehmen.

Führen wir in die Bewegungsgleichung (8) auch auf der linken Seite $\Re$ für v ein, so ergibt sich:

$$\frac{m v_c}{w_c} \cdot \frac{d\Re}{dt} = \frac{P}{w_c} - Z(\Re).$$

Nun bezeichnen wir den Quotienten $\frac{m v_c}{w_c}$, der die Dimension einer Zeit hat, mit $\tau = \frac{8}{3} \frac{\varrho' a^2}{\mu}$ (ϱ' mittlere Dichte des Kugelmateriales) und die Zahl $\frac{P}{w_c}$ mit Π und setzen $t = \tau \vartheta$, dann nimmt die Bewegungsgleichung die Form an:

$$\frac{d\Re}{\Pi - Z} = d\vartheta. \qquad (10)$$

Die Zahl $\Pi = \frac{P}{w_c}$ gibt an, wieviel mal größer die treibende Kraft ist als der charakteristische Widerstand der Flüssigkeit; wir nennen sie die „reduzierte Kraft".

ϑ ist ein Maß für die Zeit, wenn nicht eine Sekunde, sondern τ als Zeiteinheit gewählt wird und heiße „reduzierte Zeit".

Der Vorteil, der durch diese Umformung erreicht wird, ist der, daß in der Bewegungsgleichung nur mehr ein Parameter, nämlich Π auftritt.

§ 10. Wenn Z als Funktion von $\Re$ empirisch gegeben ist, so kann für ein bestimmtes Π auch $\frac{1}{\Pi - Z}$ als Funktion von $\Re$ in Form einer Kurve oder in einer Tabelle dargestellt und daher das Integral

$$\vartheta = \int_{\Re_0}^{\Re} \frac{d\Re}{\Pi - Z} \qquad (11)$$

graphisch oder rechnerisch ermittelt werden. Dabei ist der Anfangszustand für $\vartheta = 0$ durch $\Re_0$ bestimmt. Wir können daher ϑ als Funktion von $\Re$ oder $\Re$ als Funktion von ϑ durch eine Kurve darstellen und erhalten so die reduzierten Zeiten ϑ, die zur Erreichung der reduzierten Geschwindigkeit $\Re$ nötig sind.

Die Strecken, die dabei zurückgelegt werden, ergeben sich durch eine nochmalige Integration. Es sei $\Re = F(\vartheta) = \frac{v}{v_c}$; dann wird $\frac{1}{v_c} \frac{ds}{dt} = F(\vartheta)$.

1) Der Faktor $^1/_2$ ist durch die Definition von c, der Faktor π durch die Basierung der Reynoldsschen Zahl auf den Radius bedingt. Es würde sich vielleicht empfehlen, auch bei anders gestalteten Körpern als charakteristische Länge in der Reynoldsschen Zahl, den Radius des Kreises zu wählen, der mit dem Hauptspant flächengleich ist. Dann würde w_c für alle Körper den gleichen Wert haben und nur von der Flüssigkeit abhängen, was für manche Zwecke recht bequem wäre.

Für t führen wir $\tau\vartheta$ ein, dann ist $\frac{1}{v_c\tau}\frac{ds}{d\vartheta} = F(\vartheta)$. Dabei ist $v_c\tau = \frac{8}{3}\frac{\varrho'}{\varrho}a = l$ von der Dimension einer Länge. Wir führen wieder als „reduzierten Weg" $\sigma = \frac{s}{l}$ ein und erhalten $d\sigma = F(\vartheta)\,d\vartheta$.

Setzen wir $\int_0^\vartheta F(\vartheta)\,d\vartheta = S(\vartheta)$, dann wird, wenn wir für $\vartheta = 0$, $\sigma = 0$ ansetzen:

$$\sigma = S(\vartheta) \qquad (12)$$

der zur reduzierten Zeit ϑ zurückgelegte reduzierte Weg σ.

B. Die Grenzgeschwindigkeit von Kugeln.

§ 11. Als erste Frage wollen wir die nach der Grenzgeschwindigkeit behandeln, der eine gegebene Kugel in einer gegebenen Flüssigkeit unter dem Einfluß einer konstanten Kraft P zustrebt.

Diese Geschwindigkeit wird erreicht, wenn der Widerstand gleich der wirkenden Kraft ist, also wenn $P = w_c Z$ oder $\Pi = \frac{P}{w_c} = Z$ ist.

Da der charakteristische Widerstand w_c der betrachteten Flüssigkeit bekannt (Werte von w_c für einige Flüssigkeiten siehe Tabelle II), ebenso die Kraft P gegeben ist, so entnimmt man den entsprechenden Wert des Grenzwertes $\mathfrak{R}_g$ der reduzierten Geschwindigkeit $\mathfrak{R}$ entweder durch Interpolation einer Tabelle (z. B. Tabelle I) oder $\lg \mathfrak{R}_g$ als Abszisse einer Kurve wie Fig. 4, die zur Ordinate $\lg \frac{P}{w_c} = \lg \Pi = \lg Z$ gehört. Aus $\mathfrak{R}_g$ ergibt sich durch Multiplikation mit dem ebenfalls bekannten $v_c = \frac{\nu}{a}$ die Grenzgeschwindigkeit $v_g = v_c \mathfrak{R}_g$.

§ 12. Als erstes Beispiel soll ausgerechnet werden, welche Geschwindigkeit eine Kugel von $a = 10$ cm annimmt, wenn sie mit einer Kraft $P = 1$ Kgw. durch Wasser von 0° geschleppt wird. Es ist hier $P = 9{,}81 \cdot 10^5$ Dyn., aus Tabelle II entnehmen wir den Wert von $w_c = 5{,}38 \cdot 10^{-4}$ Dyn., daher wird $\Pi = 1{,}82 \cdot 10^9$ und aus Fig. 4 ergibt sich für $Z = \Pi$, $\mathfrak{R}_g = 6{,}15 \cdot 10^4$. Da nach Tabelle II $v_c = \frac{\nu}{a} = 18 \cdot 10^{-4}$ wird, so ergibt sich das Gesuchte $v_g = v_c \mathfrak{R}_g = 111$ cel. $= 1{,}11$ m/sec.

§ 13. Als zweites Beispiel soll die Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit der Regentropfen von ihrem Radius ermittelt werden, und zwar für Luft von 18° C und $p = 740$ mm. Für diese Werte von Druck und Temperatur wird $\nu = 0{,}153$ und $w_c = 43{,}4 \cdot 10^{-6}$ Dyn. Zur Berechnung gehen wir folgendermaßen vor: Für eine Anzahl von Tropfenradien, Tabelle III, Zeile 1, wird das Tropfengewicht P berechnet, Zeile 2; daraus das reduzierte Gewicht Π (3. Zeile). Aus der Tabelle oder Kurve für Z entnehmen wir die zu Π gehörigen Werte von $\mathfrak{R}_g$ (4. Zeile), durch Multiplikation mit v_c ergibt sich dann $v_g = v_c \mathfrak{R}_g$ (6. Zeile).

Um zu prüfen, wie die gefundenen Zahlen mit der Erfahrung stimmen, sind in Fig. 5 die berechneten Werte von v_g eingetragen und durch einen Kurvenzug verbunden. Gleichzeitig sind durch kleine Kreise die Messungen der Regentropfengeschwindigkeit von W. Schmidt[1]), die sich auf einen Druck von 740 mm und eine mittlere Temperatur von 18° C beziehen, eingetragen. Wie man sieht, stimmen die berechneten Werte über alle Erwartung gut bis etwa zu einem Tropfenradius von 0,4 mm; für größere Radien tritt eine systematische Abweichung ein, die ganz offenbar mit der Deformation der fallenden Regentropfen durch die Druckkräfte der Luft zusammenhängt. Es ist dies etwa auch die

Tabelle III.

Luft bei 18° C und 740 mm; $\varrho = 118 \cdot 10^{-5}$; $\mu = 1{,}81 \cdot 10^{-4}$; $\nu = \frac{\mu}{\varrho} = 1{,}53 \cdot 10^{-1}$;

$$w_c = \frac{\pi}{2}\frac{\mu^2}{\varrho} = 43{,}4 \cdot 10^{-6}.$$

a	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16
P in Dyn	$4{,}19 \cdot 10^{-3}$	$3{,}35 \cdot 10^{-2}$	$1{,}13 \cdot 10^{-1}$	$2{,}68 \cdot 10^{-1}$	$5{,}23 \cdot 10^{-1}$	$9{,}05 \cdot 10^{-1}$	2,14	4,19	7,24	1,15·10	1,72·10
$\Pi = \frac{P}{w_c}$	$9{,}66 \cdot 10$	$7{,}72 \cdot 10^2$	$2{,}60 \cdot 10^3$	$6{,}18 \cdot 10^3$	$1{,}20 \cdot 10^4$	$2{,}09 \cdot 10^4$	$4{,}93 \cdot 10^4$	$9{,}66 \cdot 10^4$	$1{,}67 \cdot 10^5$	$2{,}65 \cdot 10^5$	$3{,}96 \cdot 10^5$
$\mathfrak{R}_g$	4,60	22,5	51,0	90,0	$1{,}35 \cdot 10^2$	$1{,}9 \cdot 10^2$	$3{,}1 \cdot 10^2$	$4{,}5 \cdot 10^2$	$6{,}05 \cdot 10^2$	$7{,}75 \cdot 10^2$	$9{,}7 \cdot 10^2$
$v_c = \frac{\nu}{a}$	15,3	7,65	5,1	3,82	3,06	2,55	1,91	1,53	1,27	1,09	0,956
$v_g = v_c \cdot \mathfrak{R}_g$	70,4	172	260	344	413	485	593	689	768	845	927

1) Wiener Ber. **188**, 71, 1909.

Tabelle IV.

$\Re$	1	10	10^2	10^3	$2{,}5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	10^4	$2{,}5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	10^5
$\operatorname{tg}\beta$	0,847	0,694	0,602	0,538	0,500	0,455	0,467	0,500	0,538	0,685
$2\operatorname{tg}\beta - 1$	0,694	0,388	0,204	0,076	0,000	— 0,090	— 0,066	0,000	0,076	0,370
$1 - \operatorname{tg}\beta$	0,153	0,306	0,398	0,462	0,500	0,545	0,533	0,500	0,462	0,315

Tropfengröße, bei der man, wenn man die Tropfengröße nach der Wiesnerschen Filtrierpapier-Methode bestimmen will, eine Korrektur

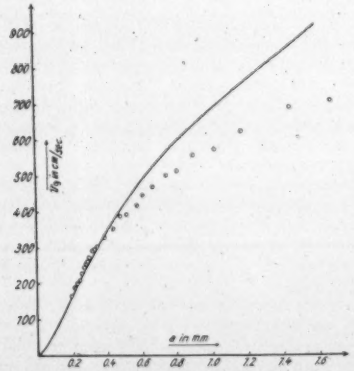

Fig. 5.

für die Fallgeschwindigkeit anbringen muß, wenn das Papier mit Tropfen geeicht wird, die nur eine kleine Geschwindigkeit besitzen.

Nimmt man an, daß ein Regentropfen zu einem abgeplatteten Rotationsellipsoid wird und ferner, daß der Luftwiderstand eines wenig abgeplatteten Rotationsellipsoides ungefähr so groß ist, wie der einer Kugel von gleichem Querschnitt, so läßt sich leicht abschätzen, wie stark die Abplattung eines Regentropfens sein müßte, um die Abweichung der berechneten Werte v_g von den gemessenen zu erklären.

Eine einfache Rechnung ergibt für Tropfen, die undeformiert 1 mm (2 mm) Durchmesser haben, in deformiertem Zustand einen Horizontaldurchmesser von 1,07 mm (2,40 mm) und einen Vertikaldurchmesser von 0,86 mm (1,39 mm) also durchaus plausible Werte.

§ 14. Als drittes Beispiel soll ermittelt werden, welchen Einfluß die Temperatur des widerstehenden Mittels (bei Gasen auch der Druck) auf die Größe der Grenzgeschwindigkeit hat. Wir gehen von der Gleichung aus

$$\ln \Pi = \ln P - \ln w_c = \ln Z.$$

Differentieren wir diese Gleichung, so ergibt sich

$$- d \ln w_c = \frac{d \ln Z}{d \ln \Re} \cdot d \ln \Re. \qquad (13)$$

Bezeichnen wir $\frac{d \ln \Re}{d \ln Z} = \operatorname{tg}\beta$, so ergibt sich, da $d \ln w_c = 2\, d \ln \mu - d \ln \varrho$ und $d \ln \Re = d \ln v - d \ln \mu + d \ln \varrho$ ist aus (13):

$$\frac{dv}{v} = - \frac{d\mu}{\mu} (2 \operatorname{tg}\beta - 1) - \frac{d\varrho}{\varrho} (1 - \operatorname{tg}\beta). \qquad (14)$$

Die Werte von $\operatorname{tg}\beta$ können unmittelbar aus Fig. 4 abgelesen werden und sind in Tabelle IV, ebenso wie die Koeffizienten $2\operatorname{tg}\beta - 1$ und $1 - \operatorname{tg}\beta$ für verschiedene Werte von $\Re$ eingetragen.

Für Flüssigkeiten ist $\frac{d\varrho}{\varrho} = 0$, für Gase $\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$ zu setzen. Die innere Reibung von Flüssigkeiten nimmt erheblich mit steigender Temperatur ab (bei Wasser z. B. einige Prozente pro Grad), bei Gasen nimmt sie mit der Temperatur zu, aber beträchtlich weniger. Aus Gleichung (14) kann der Temperatur- und Druckeinfluß leicht berechnet werden. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse darauf hinzuweisen, daß der Koeffizient $2\operatorname{tg}\beta - 1$ mit wachsendem $\Re$ zweimal sein Vorzeichen ändert. Für $\Re$ zwischen 10^3 und $5{,}10^4$ ist er sehr klein, d. h. in diesem Geschwindigkeitsbereich ist der Widerstand unabhängig von kleinen Änderungen der Größe der inneren Reibung.

C. Bremsung bewegter Kugeln.

§ 15. Wir betrachten den Fall, daß einer Kugel in einer Flüssigkeit eine bestimmte Geschwindigkeit v_0 erteilt worden ist und fragen, wie wird die Kugel abgebremst, wenn sie bloß infolge ihrer Trägheit sich weiter bewegt.

Wir knüpfen an die Bewegungsgleichung (10) an. Da hier $P = 0$ ist, ist auch $\Pi = 0$ und die Gleichung nimmt die Form an:

$$d\vartheta = - \frac{d\Re}{Z}. \qquad (15)$$

Wir fragen nach der reduzierten Zeit ϑ, die verfließt, bis die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel von $\Re_0$ auf $\Re$ gesunken ist.

Tabelle V.

Werte von $H(\mathfrak{R}) = \int_{0,1}^{\mathfrak{R}} \frac{d\mathfrak{R}}{Z}$.

	$\mathfrak{R} \cdot 10^{-n} =$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
$n = -1$	$H(\mathfrak{R}) \cdot 10^4 =$	0	549	866	1083	1249	1383	1495	1591	1674	1747
$n = 0$	$H(\mathfrak{R}) \cdot 10^4 =$	1747	2157	2373	2518	2625	2709	2778	2835	2884	2926
$n = 1$	$H(\mathfrak{R}) \cdot 10^4 =$	2926	3167	3278	3347	3393	3428	3455	3476	3494	3509
$n = 2$	$[H(\mathfrak{R}) - 0{,}3] \cdot 10^5 =$	5090	5831	6117	6280	6384	6455	6508	6549	6581	6607
$n = 3$	$[H(\mathfrak{R}) - 0{,}36] \cdot 10^6 =$	6073	7323	7668	7883	8008	8089	8146	8187	8218	8243
$n = 4$	$[H(\mathfrak{R}) - 0{,}368] \cdot 10^7 =$	2427	3427	3757	3924	4024	4092	4142	4180	4210	4235

Durch Integration ergibt sich aus (15):

$$\vartheta = \int_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{R}_0} \frac{d\mathfrak{R}}{Z}. \tag{16}$$

Aus Gründen, welche weiter unten klar werden, wollen wir das Integral (16) in 2 Summanden trennen:

$$\vartheta = \int_{\mathfrak{R}}^{0,1} \frac{d\mathfrak{R}}{Z} + \int_{0,1}^{\mathfrak{R}_0} \frac{d\mathfrak{R}}{Z}; \tag{17}$$

dabei ist der Wert $\mathfrak{R} = 0{,}1$ als jener Wert von $\mathfrak{R}$ angenommen, unterhalb dessen das Stokessche Gesetz sicher gültig ist. Bezeichnen wir die Funktion $\int_{0,1}^{\mathfrak{R}} \frac{d\mathfrak{R}}{Z} \equiv H(\mathfrak{R})$, so läßt sich (17) auch schreiben:

$$\vartheta = H(\mathfrak{R}_0) - H(\mathfrak{R}). \tag{18}$$

Wenn die Widerstandsfunktion $Z(\mathfrak{R})$ empirisch gegeben ist, so läßt sich $H(\mathfrak{R})$ durch numerische Integration ermitteln und in einer Kurve oder in Tabellenform darstellen. Tabelle V enthält einige Werte von $H(\mathfrak{R})$ im Bereich $0{,}1 < \mathfrak{R} < 10^5$.

Für Werte von $\mathfrak{R} < 0{,}1$ läßt sich die Funktion $H(\mathfrak{R})$ durch einen geschlossenen Ausdruck wiedergeben. Da in diesem Intervall das Stokessche Gesetz gilt, wird $Z(\mathfrak{R}) = 12\,\mathfrak{R}$ und

$$H(\mathfrak{R}) = -\int_{\mathfrak{R}}^{0,1} \frac{d\mathfrak{R}}{12\,\mathfrak{R}} = -\frac{1}{12} \ln \frac{1}{10\mathfrak{R}} = 0{,}192 \lg 10\mathfrak{R}; \tag{19}$$

da $\mathfrak{R} < 0{,}1$ ist $H(\mathfrak{R})$ in diesem Intervall negativ.

Für $\mathfrak{R} = 10^{-1}$ 10^{-2} 10^{-3} 10^{-n}

wird $H(\mathfrak{R}) = 0$ $-0{,}192$ $-0{,}384$ $-0{,}192\,(n-1)$.

Im Bereich des Stokesschen Gesetzes nähert sich $\mathfrak{R}$ asymptotisch in geometrischer Progression der Null.

Die Berechnung von ϑ in einem konkreten Fall geschieht nach Gleichung (18). Ist $\mathfrak{R} > 0{,}1$, so werden die beiden Werte $H(\mathfrak{R}_0)$ bzw. $H(\mathfrak{R})$ einer Tabelle oder einer Kurve entnommen. Ist $\mathfrak{R} < 0{,}1$, so geschieht dies nach Gleichung

$$\vartheta = H(\mathfrak{R}_0) - 0{,}192 \lg 10\,\mathfrak{R}. \tag{20}$$

§ 16. Um die Bremsstrecke zu finden, auf der die Abbremsung von $\mathfrak{R}_0$ auf $\mathfrak{R}$ stattfindet, gehen wir von der Gleichung aus:

$$\mathfrak{R} = \frac{v}{v_c} = \frac{1}{v_c}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{v_c \tau}\cdot\frac{ds}{d\vartheta} = \frac{d\sigma}{d\vartheta}.$$

Es ist daher $d\sigma = \mathfrak{R}\,d\vartheta$ und wir erhalten die reduzierte Bremsstrecke:

$$\sigma = \int_0^{\vartheta} \mathfrak{R}\,d\vartheta. \tag{21}$$

Dieses Integral ist durch die schief gestrichelte Fläche $O'abc$ in Fig. 6 dargestellt. Wie man

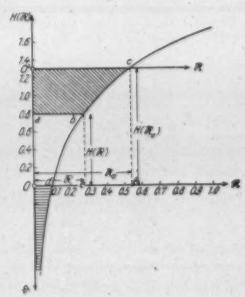

Fig. 6.

aus dieser Figur unmittelbar ablesen kann, ist $O'abc = O'Oefc - aOeb - defcb + deb$ oder

$$\sigma = O'abc = \mathfrak{R}_0 H(\mathfrak{R}_0) - \mathfrak{R} H(\mathfrak{R}) - \int_{0,1}^{\mathfrak{R}_0} H(\mathfrak{R})\,d\mathfrak{R} + \int_{0,1}^{\mathfrak{R}} H(\mathfrak{R})\,d\mathfrak{R}; \tag{22}$$

Zu der gleichen Formel führt die partielle Integration von (21).

Bezeichnen wir das Integral $\int_{0,1}^{\mathfrak{R}} H(\mathfrak{R})\,d\mathfrak{R} \equiv K(\mathfrak{R})$,

so können wir auch schreiben:

$$\sigma = \mathfrak{R}_0 H(\mathfrak{R}_0) - \mathfrak{R} H(\mathfrak{R}) - K(\mathfrak{R}_0) + K(\mathfrak{R}) = [\mathfrak{R} H(\mathfrak{R}) - K(\mathfrak{R})]_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{R}_0}. \quad (23)$$

Die Funktion $K(\mathfrak{R})$ findet man durch abermalige numerische Integration. Werte davon sind in Tab. VI angegeben. Um die reduzierte Strecke σ_∞ zu finden, auf der die Kugel ihre gesamte kinetische Energie verliert, stellen wir σ_∞ als Summe von $\sigma_{0,1}$ und σ' dar:

$$\sigma_\infty = \sigma_{0,1} + \sigma'. \quad (24)$$

Mit $\sigma_{0,1}$ ist dabei jene Strecke bezeichnet, auf der die Geschwindigkeit $\mathfrak{R}_0$ bis auf den Wert 0,1 abgebremst ist. Ihre Größe ist gegeben durch die Fläche $O'Odbc$ in Fig. 6. Aus Gl. (23) ergibt sich, unter Berücksichtigung, daß seiner Definition entsprechend $H(0,1) = 0$ und $K(0,1) = 0$ ist,

$$\sigma_{0,1} = \mathfrak{R}_0 H(\mathfrak{R}_0) - K(\mathfrak{R}_0). \quad (25)$$

Die Strecke σ' ist jene, die die Kugel dann noch zurücklegen muß, bis $\mathfrak{R} = 0$ geworden ist; ihre Größe ist durch die in Fig. 6 horizontal schraffierte, bis ins Unendliche reichende Fläche zwischen der ϑ-Achse und der Kurve $H(\mathfrak{R})$ dargestellt. Es ist daher

$$\sigma' = \int_{H(\mathfrak{R}_0)}^{\infty} \mathfrak{R}\, d\vartheta. \quad (26)$$

Nun ist aber aus Gl. (19), mit Rücksicht auf (18), zu ersehen, daß in diesem Bereich $\mathfrak{R}$ dargestellt werden kann durch:

$$\mathfrak{R} = \tfrac{1}{10} e^{-12(\vartheta - H(\mathfrak{R}_0))}.$$

Setzt man diesen Wert in (26) ein, so wird:

$$\sigma' = \tfrac{1}{120} = 8{,}33 \times 10^{-3}. \quad (27)$$

Die gesamte reduzierte Strecke ist daher nach (24), unter Rücksicht auf (25):

$$\sigma_\infty = \sigma_{0,1} + \sigma' = \mathfrak{R}_0 H(\mathfrak{R}_0) - K(\mathfrak{R}_0) + 8{,}33 \times 10^{-3}. \quad (28)$$

Wir gelangen so zu dem Satz, daß die reduzierte Bremsstrecke nur abhängt von $\mathfrak{R}_0$ und unabhängig ist von der Beschaffenheit des Mediums sowie der Masse und Größe der Kugel.

Es ergeben sich folgende Werte für verschiedene:

$\mathfrak{R}_0 =$	10^{-1}	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
$\sigma_\infty =$	0,0083	0,075	0,50	2,39	6,70	12,1	16,8

Die wirkliche Bremsstrecke s_∞ berechnet sich nach der Definition von σ in § 10 zu:

$$s_\infty = \sigma_\infty \cdot l = \frac{8}{3}\frac{\varrho'}{\varrho} \cdot a\sigma_\infty; \quad (29)$$

sie ist also proportional dem Kugelradius, hängt nur vom Verhältnis der Dichte der Kugel zur

Tabelle VI.

Werte von $K(\mathfrak{R}) = \int_{0,1}^{\mathfrak{R}} H(\mathfrak{R})\, d\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R} \cdot 10^{-n} =$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
$n = -1$	0,0000	0,0031	0,0103	0,0201	0,0318	0,0450	0,0594	0,0748	0,0912	0,1083
$n = 0$	0,1083	0,3071	0,5343	0,7792	1,0367	1,3039	1,5787	1,8597	2,1457	2,4362
$n = 1$	2,436	5,498	8,727	12,041	15,411	18,821	22,261	25,726	29,211	32,712
$n = 2$	32,712	68,247	104,237	140,437	176,772	213,204	249,689	286,220	322,787	359,381
$n = 3$	359,381	726,241	1093,751	1461,551	1829,511	2197,571	2565,701	2933,871	3302,071	3670,301
$n = 4$	3670,301	7353,2611	11036,697	14720,452	18404,516	22088,574	25772,699	29456,860	33141,055	36825,547

Dichte der Flüssigkeit, nicht aber von der Zähigkeit der Flüssigkeit ab. Natürlich darf man bei dieser Aussage nicht außer acht lassen, daß die Bremsstrecke nicht auf die wirkliche Anfangsgeschwindigkeit v_0 sondern auf die reduzierte Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{R}_0$ bezogen wird.

Fig. 7 stellt die Bremskurve der Kugel vor, die für alle Kugelmassen, Kugelgrößen und alle Medien gültig ist. Sie stellt den Logarithmus der

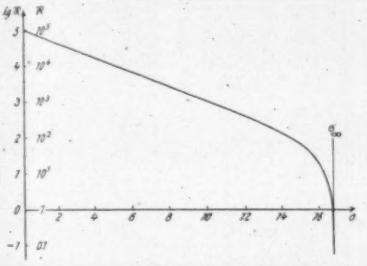

Fig. 7.

jeweils reduzierten Geschwindigkeit $\mathfrak{R}$ als Funktion des zurückgelegten reduzierten Weges σ dar.

Wie man aus der Figur sieht, ist die Kurve $\lg \mathfrak{R} = f(\sigma)$ im Anfang ziemlich geradlinig. Wir lesen die Gleichung dieser Geraden aus der Kurve ab als:

$$\lg \mathfrak{R} = \lg \mathfrak{R}_0 - 0{,}20\,\sigma. \qquad (30)$$

Durch Multiplikation mit 2,30 erhalten wir natürliche Logarithmen und daraus:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 e^{-0{,}46\sigma}. \qquad (31)$$

Nimmt man an, daß der Flüssigkeitswiderstand proportional v^2 ist, daß also $W = c \cdot a^2 \pi \frac{\varrho v^2}{2}$ gesetzt werden kann, wo c konstant ist, dann kann man in bekannter Weise die Gleichung berechnen, die Geschwindigkeit und Weg verbindet. Sie lautet:

$$v = v_0 e^{-c\sigma}, \qquad (32)$$

wenn σ die reduzierte Weglänge bezeichnet. Aus dem Vergleich von (31) und (32) ergibt sich der Wert von $c = 0{,}46$ im Intervall $\mathfrak{R} = 10^5$ bis 10^3. Dies stimmt nun mit Tab. I, aus der zu ersehen ist, daß c in diesem Bereich ziemlich konstant ist und etwa nur zwischen 0,40 und 0,49 schwankt. Es ist diese Übereinstimmung natürlich nur als eine erwünschte Kontrolle der numerischen Rechnung zu betrachten, da diese ja auf den empirischen Werten von c aufgebaut ist.

§ 17. Ein Beispiel möge wieder zur Erläuterung und Veranschaulichung dienen. Eine Kegelkugel von der Dichte $\varrho' = 1$ g/cm³ und einem Durchmesser von $2a = 20$ cm, falle senkrecht auf eine Wasseroberfläche (20° C) und habe unter der Wasseroberfläche noch eine Geschwindigkeit $v_0 = 100$ cel $= 1{,}00$ m/sec.

Für diese Kugel wird $v_c = \frac{\nu}{a} = \frac{0{,}01}{10} = 10^{-3}$ cel und daher $\mathfrak{R}_0 = \frac{v_0}{v_c} = 10^5$; ferner wird $l = \frac{8}{3}\frac{\varrho'}{\varrho} a = 26{,}7$ cm und $\tau = \frac{8}{3}\varrho' \frac{a^2}{\mu} = 2{,}67 \times 10^4$ sec.

Wir fragen nach der Zeit, die vergeht, bis die Kugel auf eine Geschwindigkeit $v_n = \frac{v_0}{n}$ (für $n = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$) abgebremst ist und nach dem Weg, der dabei zurückgelegt wird, sowie nach der Gesamtstrecke, auf der die Kugel ihre ganze kinetische Energie verloren hat.

Die Werte der reduzierten Zeiten finden wir nach Gleichung (18) direkt aus Tabelle V, wenn wir $\mathfrak{R}_0 = 10^5$ setzen; ebenso die reduzierten Wege σ nach Gleichung (23) aus Tabelle V und VI. Durch Multiplikation von ϑ mit $\tau = 2{,}67 \cdot 10^4$ sec und von σ mit $l = 26{,}7$ cm erhalten wir die wirklichen Zeiten in Sekunden und die Wege in Zentimetern.

In Tabelle VII sind die so berechneten Werte zusammengestellt; die gesamte Bremsstrecke $s_\infty = \sigma_\infty \cdot l$ berechnet sich nach Gleichung (24), (25) und (27) zu $s_\infty = 449$ cm.

Tabelle VII.

$\mathfrak{R}$	ϑ	t in sec	σ	s in cm
10^5	0,000000	0,00	0,000	0
10^4	0,000181	4,83	4,68	125
10^3	0,00235	62,8	10,11	270
10^2	0,0175	468,0	14,43	385
10^1	0,0758	2023	16,3	436
1	0,194	5175	16,7	447
0,1	0,368	9820	16,8	449
0	∞	∞	16,8	449

D. Fallbewegung von Kugeln.

§ 18. Wir wollen hier nur den einfachsten Fall behandeln, daß die Kugel von der Ruhe aus zu fallen beginnt. Wir berechnen zunächst die treibende Kraft P (Gewicht — Auftrieb); es ist $P = \frac{4}{3} a^3 (\varrho' - \varrho)\, \pi \cdot g$, wenn ϱ' die mittlere Dichte der Kugel und ϱ die Dichte der Flüssigkeit ist. Daraus ergibt sich die reduzierte Kraft $\Pi = \frac{P}{w_c}$, wobei $w_c = \frac{1}{2}\pi \nu^2 \varrho$ der charakteristische Widerstand der Flüssigkeit ist. Es ist daher:

$$\Pi = \frac{8}{3} a^3 \left(\frac{\varrho'}{\varrho} - 1\right) \frac{g}{\nu^2} = \frac{g l}{v_c^2}\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho'}\right). \qquad (33)$$

Haben wir Π gefunden, erhalten wir aus Tabelle I den Wert der reduzierten Grenzgeschwindigkeit $\mathfrak{R}_g$, dem die Kugel beim Fallen zustrebt.

Die reduzierte Zeit, die zur Erreichung einer Geschwindigkeit $\mathfrak{R}$ erforderlich ist, ergibt sich unmittelbar aus (11) zu:

$$\vartheta = \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{d\mathfrak{R}}{\Pi - Z} \equiv \vartheta(\mathfrak{R}, \Pi). \tag{34}$$

Um den reduzierten Weg zu finden, gehen wir von $d\sigma = \mathfrak{R}(\vartheta)\, d\vartheta$ aus und integrieren. Wir erhalten so:

$$\sigma = \int_0^{\vartheta} \mathfrak{R}(\vartheta)\, d\vartheta \tag{35}$$

und nach partieller Integration:

$$\begin{aligned} \sigma &= \left| \mathfrak{R}\,\vartheta \right|_0^{\vartheta} - \int_0^{\mathfrak{R}} \vartheta(\mathfrak{R}, \Pi)\, d\mathfrak{R} \\ &= \mathfrak{R}\,\vartheta(\mathfrak{R}, \Pi) - \int_0^{\mathfrak{R}} \vartheta(\mathfrak{R}, \Pi)\, d\mathfrak{R}. \end{aligned} \tag{36}$$

Wenn wir zur Abkürzung schreiben

$$G(\mathfrak{R}, \Pi) \equiv \int_0^{\mathfrak{R}} \vartheta(\mathfrak{R}, \Pi)\, d\mathfrak{R}$$

wird:

$$\sigma = \mathfrak{R}\,\vartheta(\mathfrak{R}, \Pi) - G(\mathfrak{R}, \Pi). \tag{37}$$

Gleichung (34) ergibt also die Beziehung zwischen reduzierter Geschwindigkeit $\mathfrak{R}$ und Zeit ϑ, Gleichung (37) die Beziehung zwischen reduziertem Weg σ und Geschwindigkeit $\mathfrak{R}$; somit lassen sich alle Fragen, die sich auf die Bewegung von Kugeln unter Einwirkung einer konstanten Kraft beziehen, beantworten.

In Tabelle VIII sind für 6 Werte von Π die zu bestimmten Werten von $\mathfrak{R}$ gehörigen Werte von $\vartheta(\mathfrak{R}, \Pi)$, $G(\mathfrak{R}\,\Pi)$ und σ angegeben. Die 6 Werte von Π sind so gewählt, daß sie den Grenzgeschwindigkeiten $\mathfrak{R}_g = 1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5$ entsprechen. Die Werte von ϑ und σ bis zu Werten von $\mathfrak{R} = 0{,}9\,\mathfrak{R}_g$ sind durch numerische Integration gewonnen. Für größere Werte von $\mathfrak{R}$ gestaltet sich die Berechnung einfacher und genauer, wenn man wie folgt vorgeht.

Wenn man sich die Kurve, die Z als Funktion von $\mathfrak{R}$ im Intervall 0 bis $\mathfrak{R}_g$ darstellt, zeichnet, so sieht man, daß ihr Verlauf im Intervall $\mathfrak{R}_n = 0{,}9\,\mathfrak{R}_g$ bis $\mathfrak{R}_g$ praktisch linear verläuft. Bezeichnen wir die Tangente des Neigungswinkels, den die Kurve im Punkte $\mathfrak{R}_n$ mit der $\mathfrak{R}$-Achse bildet, mit A, so läßt sich Z im besagten Intervall darstellen durch:

$$Z = Z_n + A\,(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_n), \tag{38}$$

Tabelle VIII.

$\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_g$		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
$\Pi_0 = 14{,}5$	$\vartheta\ (\mathfrak{R}, \Pi_0)$	0,0	0,0072	0,0150	0,0237	0,0337	0,0454	0,0596	0,0779	0,1034	0,1457	0,1890	0,2895	0,4338
$\mathfrak{R}_g = 1$	$G\ (\mathfrak{R}, \Pi_0)$	0,0	0,00035	0,00145	0,00335	0,00520	0,0101	0,0153	0,0221	0,0311	0,04338			
$A = 16$	σ	0,0	0,00037	0,00155	0,00376	0,00728	0,01260	0,02046	0,03243	0,05162	0,08775	0,12794	0,22585	0,36965
$\Pi_1 = 256$	$\vartheta\ (\mathfrak{R}, \Pi_1)$	0,0	0,004	0,0083	0,0131	0,0184	0,0246	0,0320	0,0411	0,0535	0,0735	0,09332	0,13928	0,2053
$\mathfrak{R}_g = 10$	$G\ (\mathfrak{R}, \Pi_1)$	0,0	0,002	0,008	0,0181	0,0341	0,0555	0,0836	0,1197	0,1669	0,2295			
$A = 35{,}0$	σ	0,0	0,002	0,0086	0,0212	0,0395	0,0675	0,1084	0,1680	0,2611	0,4320	0,6159	1,0641	1,722
$\Pi_2 = 7{,}45 \cdot 10^3$	$\vartheta\ (\mathfrak{R}, \Pi_2)$	0,0	0,00136	0,00279	0,00432	0,00600	0,00789	0,01008	0,01276	0,01635	0,02195	0,027383	0,03998	0,05809
$\mathfrak{R}_g = 10^3$	$G\ (\mathfrak{R}, \Pi_2)$	0,0	0,0068	0,0277	0,0633	0,1148	0,1839	0,2734	0,3865	0,5305	0,7191			
$A = 127$	σ	0,0	0,0068	0,0281	0,0663	0,1252	0,2106	0,3314	0,5067	0,7775	1,2564	1,7605	2,9864	4,792
$\Pi_3 = 4{,}2 \cdot 10^5$	$\vartheta\ (\mathfrak{R}, \Pi_3)$	0,0	0,00024	0,000489	0,000749	0,001027	0,001337	0,001693	0,002132	0,002722	0,003679	0,0046007	0,006738	0,009810
$\mathfrak{R}_g = 10^4$	$G\ (\mathfrak{R}, \Pi_3)$	0,0	0,012	0,049	0,111	0,200	0,318	0,469	0,660	0,902	1,218			
$A = 7{,}5 \cdot 10^2$	σ	0,0	0,012	0,0488	0,1137	0,2108	0,3505	0,5468	0,8324	0,12756	2,0931	2,9483	5,0321	8,0911
$\Pi_4 = 4{,}51 \cdot 10^7$	$\vartheta\ (\mathfrak{R}, \Pi_4)$	0,0	2,23	4,50	6,85	9,30	11,99	15,04	18,70	23,60	31,78	39,979	58,46	85,26
$\mathfrak{R}_g = 10^5$	$G\ (\mathfrak{R}, \Pi_4)$	0,0	0,0112	0,0448	0,1016	0,1826	0,2889	0,4229	0,5909	0,8009	1,0719			
$A = 8{,}65 \cdot 10^3$	σ	0,0	0,0111	0,0452	0,1039	0,1894	0,3106	0,4795	0,7181	1,0871	1,7883	2,5342	4,3523	7,0203
$\Pi_5 = 4{,}34 \cdot 10^7$	$\vartheta\ (\mathfrak{R}, \Pi_5)$	0,0	2,315	4,685	7,17	9,86	12,86	16,37	20,72	26,605	36,915	47,315	71,415	100,065
$\mathfrak{R}_g = 10^6$	$G\ (\mathfrak{R}, \Pi_5)$	0,0	0,0466	0,1056	0,1908	0,3029	0,4489	0,6358	0,8689	1,1818				
$A = 6{,}65 \cdot 10^4$	σ	0,0	0,01155	0,04710	0,1095	0,2036	0,3401	0,5333	0,8146	1,2586	2,14055	3,10505	5,45555	8,90555

Tabelle IX.

Körper	Wassertropfen	Stahlkugel	Öltropfen	Steinkugel
Medium	Luft 18° C, 740 mm *Hg*		Wasser 20°	
v	0,153	0,153	0,01	0,01
w_c	$43{,}4 \cdot 10^{-6}$	$43{,}4 \cdot 10^{-6}$	$157 \cdot 10^{-6}$	$157 \cdot 10^{-6}$
a	0,05	0,05	0,05	5,0
$v_c = \frac{v}{a}$	3,06	3,06	0,2	0,002
V	$5{,}24 \cdot 10^{-4}$	$5{,}24 \cdot 10^{-4}$	$5{,}24 \cdot 10^{-4}$	524
ϱ'	1	7,8	0,9	2,5
ϱ	$118 \cdot 10^{-5}$	$118 \cdot 10^{-5}$	1,0	1,0
$P = [(\varrho' - \varrho)\, V]\, g$	$5{,}14 \cdot 10^{-1}$	4,01	$5{,}14 \cdot 10^{-2}$	$7{,}71 \cdot 10^{3}$
$\Pi = \frac{P}{w_c}$	$1{,}184 \cdot 10^{4}$	$9{,}24 \cdot 10^{4}$	$3{,}27 \cdot 10^{2}$	$4{,}91 \cdot 10^{9}$
$\Re_g$	133	435	11,7	$1{,}08 \cdot 10^{3}$
$v_g = \Re_g \cdot v_c$ in cm/sec	407	1331	2,34	216
$l = \frac{8}{3} \frac{\varrho'}{\varrho} a \left[l' = l\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho'}{\varrho}\right)\right]$	112,8	880	0,12 [0,187]	33,3 [40,0]
$\tau = \frac{l}{v_c} \left[\tau' = \tau\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho}{\varrho'}\right)\right]$	36,9	285	0,6 [0,935]	$1{,}667 \cdot 10^{4}$ [$1{,}999 \cdot 10^{4}$]
$t_{0,9}$ in sec	0,61	2,1	0,040 [0,062]	0,59 [0,70]
$t_{0,99}$ in sec	1,24	4,0	0,076 [0,12]	1,12 [1,34]
$t_{0,999}$ in sec	1,73	5,7	0,113 [0,18]	1,67 [2,0]
$s_{0,9}$ in cm	160	1700	0,06 [0,094]	72 [86]
$s_{0,99}$ in cm	380	4100	0,14 [0,22]	185 [220]
$s_{0,999}$ in cm	600	6600	0,23 [0,35]	300 [360]

wobei Z_n der Wert von Z für $\Re = \Re_n$ ist. Wir können nun die in dem Geschwindigkeitsintervall $\Re_n$ bis $\Re$ verstrichenen Zeiten ϑ' und durchlaufenen Wege σ' berechnen nach:

$$\vartheta' = \int_{\Re_n}^{\Re} \frac{d\Re}{\Pi - Z} \tag{39}$$

und

$$\sigma' = \int_{0}^{\vartheta'} \Re\, d\vartheta'. \tag{40}$$

Setzt man in diese Gleichung den Wert (38) für Z ein, so lassen sich ϑ' und σ' durch einfache Integration in geschlossener Form darstellen. Es wird:

$$\vartheta' = \frac{1}{A} \ln \frac{1 - \Re_n/\Re_g}{1 - \Re/\Re_g} \tag{41}$$

und

$$\sigma' = \frac{\Re_g}{A} \left[\ln \frac{1 - \Re_n/\Re_g}{1 - \Re/\Re_g} - (\Re/\Re_g - \Re_n/\Re_g) \right]. \tag{42}$$

Nach diesen Gleichungen sind die Werte von ϑ und σ in Tabelle VIII für Werte von $\Re/\Re_g = 0{,}95$, 0,99 und 0,999 berechnet worden; Tabelle VIII enthält auch die Werte von A, die aus der Z-Kurve abgelesen sind.

§ 19. Als erstes Beispiel wollen wir die Fallbewegung von 4 verschiedenen Kugeln behandeln, und zwar eines Regentropfens von $a = 0{,}05$ cm und einer gleich großen Stahlkugel, die beide in Luft von 20° C und $p = 740$ mm fallen; ferner eines Öltropfens gleicher Größe, der in Wasser von 20° C aufsteigt und schließlich eines kugelförmigen Steines von $a = 5$ cm, der in Wasser von 20° C untersinkt.

Gefragt ist nach der Grenzgeschwindigkeit v_g dieser 4 Kugeln, sowie nach den Zeiten $t_{0,9}$, $t_{0,99}$, $t_{0,999}$, die diese Kugeln benötigen, um die Geschwindigkeit von $0{,}9\, v_g$, $0{,}99\, v_g$, $0{,}999\, v_g$ zu erreichen, und um die dabei zurückgelegten Wege $s_{0,9}$, $s_{0,99}$, $s_{0,999}$. Die Resultate der Rechnung sind in Tabelle IX zusammengestellt.

§ 20. Als zweites Beispiel soll die Fallbewegung dreier Kugeln berechnet werden, die dasselbe reduzierte Gewicht $\Pi = 4{,}2 \times 10^{5}$ besitzen, und zwar einer Korkkugel (I) und einer Stahlkugel (II), die in Luft fallen und einer Steinkugel (III), die in Wasser fällt.

Da auf alle drei Kugeln dasselbe Π wirkt, genügt ihre Bewegung derselben Differentialgleichung, d. h. alle reduzierten Größen sind für die drei Kugeln identisch. Wir können $\Re$ und σ als Funktion von ϑ direkt der Tabelle VIII entnehmen. Bezeichnen wir mit $\Re^* = \Pi\vartheta$ die reduzierte Geschwindigkeit beim Fall ohne Widerstand und analog mit $\sigma^* = \frac{\Pi}{2} \cdot \vartheta^2$ den

Tabelle X.

Kugel	I	II	III
Material	Kork, $\varrho' = 0{,}25$	Stahl, $\varrho' = 7{,}8$	Stein, $\varrho' = 2{,}5$
Medium	Luft, 18° C, 740 mm		Wasser 20° C
H	$4{,}2 \cdot 10^5$	$4{,}2 \cdot 10^5$	$4{,}2 \cdot 10^5$
w_c in Dyn	$4{,}34 \cdot 10^{-5}$	$4{,}34 \cdot 10^{-5}$	$15{,}7 \cdot 10^{-5}$
$P = H \cdot w_c$ in Dyn	18,2	18,2	65,9
a in cm	0,259	0,0825	0,22
$l = \frac{8}{3}\frac{\varrho'}{\varrho} a$ in cm	146	1450	1,47 [1,76]
v	0,153	0,153	0,01
$v_c = \frac{v}{a}$ in cm/sec	$5{,}91 \cdot 10^{-1}$	1,85	$4{,}55 \cdot 10^{-2}$
$\tau = \frac{l}{v_c}$ in sec	247	785	32,3 [38,8]

reduzierten Weg, dann können wir einfach berechnen, um wieviel die Geschwindigkeit $\mathfrak{R}$ und der zurückgelegte Weg σ zu einer bestimmten Zeit ϑ bei der Bewegung im widerstehenden Mittel hinter $\mathfrak{R}^*$ und σ^* zurückbleibt. Wir nennen $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R} \equiv \Delta\mathfrak{R}$ und $\sigma^* - \sigma \equiv \Delta\sigma$ und tragen die Werte von $\Delta\mathfrak{R}$ und $\Delta\sigma$ als Ordinaten zu ϑ als Abszissen auf; dann erhalten wir die beiden Kurven von Figur 8.

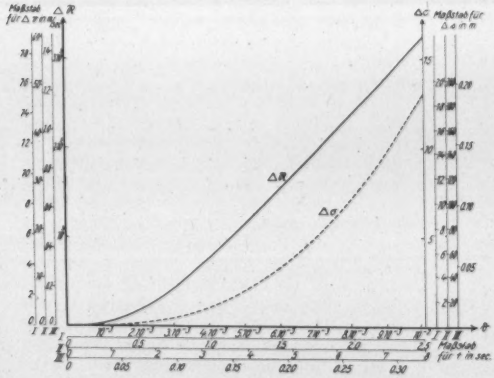

Fig. 8.

Wollen wir die wirklichen Größen t, v, s ermitteln, so brauchen wir nur für jede Kugel den ihr zugehörigen Maßstab zu verwenden und können dann die zusammengehörigen Werte von Zeit, Geschwindigkeit und Weg aus der Kurve ablesen. In Figur 8 sind unten die 3 Maßstäbe für die Kugeln I, II und III für die Zeit, links für die Geschwindigkeit und rechts für den Weg eingetragen. Der Maßstab für die Kugel III ist ohne Berücksichtigung der mitbewegten Flüssigkeit (siehe Abschnitt E) berechnet.

Um die Maßstabfaktoren τ für die Zeit, l für den Weg und v_c für die Geschwindigkeit zu berechnen, gehen wir folgendermaßen vor. Zunächst entnehmen wir w_c für die beiden Medien Luft und Wasser der Tabelle II, berechnen dann $P = H \cdot w_c$ und aus P, unter Berücksichtigung von ϱ' und ϱ, den Radius a der betreffenden Kugel; dann ist $v_c = \frac{v}{a}$, $l = \frac{8}{3}\frac{\varrho'}{\varrho} a$ und $\tau = \frac{l}{v_c}$ gefunden. Die Werte dieser Größen für unsere drei Kugeln sind in Tabelle X eingetragen.

Um den Unterschied in der wirklichen Bewegung recht anschaulich hervortreten zu lassen, sind in Tabelle XI die Werte von v und s für die drei Kugeln, für gleiche, wirkliche Zeiten berechnet, zusammengestellt.

E. Berücksichtigung der Mitbewegung der Flüssigkeit.

§ 21. Es muß nun noch auf einen Punkt aufmerksam gemacht werden, der bis jetzt in unseren Betrachtungen nicht berücksichtigt worden ist.

Wir sind von der Bewegungsgleichung $m\frac{dv}{dt} = P - W$ ausgegangen, in der m die Masse der bewegten Kugel bedeutet hat und haben dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß die

Tabelle XI.

	Zeit in sec	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
Kugel I Kork in Luft, $a = 0{,}259$ cm	Freier Fall $v = g(1-\varepsilon)t$ in m/sec	0,0	4,91	9,81	14,7	19,6	24,5	29,4	39,2	49,1	58,9	68,7
	Geschwindigkeit d. Kugel I v in m/sec	0,0	4,02	5,47	5,82	5,88	5,91	5,91	5,91	5,91	5,91	5,91
	Freier Fall $s = \frac{g}{2}(1-\varepsilon)t^2$ in m	0,0	1,23	4,90	11,0	19,6	30,6	44,1	78,4	123	176	240
	Weg der Kugel I s in m	0,0	1,10	3,43	6,39	9,31	12,2	15,3	21,1	27,1	32,9	38,9

	Zeit in sec	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
Kugel II Stahl in Luft, $a = 0{,}0825$ cm	Freier Fall $v = g(1-\varepsilon)t$ in m/sec	0,0	4,91	9,81	14,7	19,6	24,5	29,4	39,2	49,1	58,9	68,7
	Geschwindigkeit d. Kugel II v in m/sec	0,0	4,81	8,88	12,1	14,3	15,9	16,8	17,8	18,3	18,4	18,5
	Freier Fall $s = \frac{g}{2}(1-\varepsilon)t^2$ in m	0,0	1,23	4,90	11,0	19,6	30,6	44,1	78,4	123	176	240
	Weg der Kugel II s in m	0,0	1,23	3,77	9,57	16,4	23,9	31,5	47,6	67,4	85,6	104

	Zeit in sec	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35			
Kugel III Stein in Wasser Ohne Berücksichtigung der Mitbewegung der Flüssigkeit $a = 0{,}22$ cm	Freier Fall $v = g(1-\varepsilon)t$ in m/sec	0,0	0,295	0,589	0,884	1,18	1,47	1,78	2,06			
	Geschwindigkeit d. Kugel III v in m/sec	0,0	0,264	0,387	0,432	0,448	0,453	0,455	0,455			
	Freier Fall $s = \frac{g}{2}(1-\varepsilon)t^2$ in m	0,0	0,00735	0,0294	0,0662	0,118	0,184	0,267	0,360			
	Weg der Kugel III s in m	0,0	0,00720	0,0232	0,0434	0,0662	0,0889	0,111	0,135			
Kugel III Stein in Wasser Mit Berücksichtigung der Mitbewegung der Flüssigkeit	Freier Fall $v = g\frac{1-\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}t$ in m/sec	0,0	0,245	0,49	0,735	0,980	1,23	1,47	1,72			
	Geschwindigkeit d. Kugel III v in m/sec	0,0	0,223	0,357	0,416	0,439	0,450	0,453	0,455			
	Freier Fall $s = \frac{g}{2}\frac{1-\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}t^2$ in m	0,0	0,00613	0,0245	0,0551	0,0980	0,153	0,221	0,300			
	Weg der Kugel III s in m	0,0	0,00572	0,0208	0,0396	0,0604	0,0836	0,106	0,128			

kinetische Energie der durch die Kugel in Bewegung versetzten Flüssigkeit gegenüber der kinetischen Energie der Kugel zu vernachlässigen ist, wie das z. B. meist bei der Bewegung in Luft der Fall ist.

Sehr häufig wird das aber nicht gestattet sein, und zwar immer dann, wenn der Dichtenunterschied zwischen Kugel und Medium nicht groß ist; in diesem Falle müßte auf die rechte Seite der Bewegungsgleichung noch ein Glied $-m'\frac{dv}{dt}$ angefügt werden, das die Größe des Trägheitswiderstandes der mitbewegten Flüssigkeit angibt. Nimmt man dieses Glied auf die linke Seite, so kann das dann auch so gedeutet werden, daß die Kugel eine scheinbare Massenvergrößerung m' erfahren hat.

Die Schwierigkeit liegt nun darin, daß wir über die Größe von m' nichts aussagen können und daß diese Größe im allgemeinen auch von der Geschwindigkeit abhängig sein wird. Indes wird man doch der Wirklichkeit um einen Schritt näher kommen, wenn man m' als konstant ansieht und seine Größe abzuschätzen versucht.

Zu dieser Abschätzung bietet nun die Bewegung einer Kugel in einer reibungslosen Flüssigkeit die Handhabe. Wie oben im ersten Teil erwähnt ist, ist die kinetische Energie der mitbewegten Flüssigkeitsmasse in diesem Falle $\frac{1}{4} V\varrho v^2$, während die kinetische Energie der Kugel $\frac{1}{2} V\varrho' v^2$ ist. Es ist hier also $m' = \frac{V}{2}\varrho$ und von der Geschwindigkeit unabhängig. Wir können daher schreiben:

$$m + m' = m\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varrho}{\varrho'}\right) = m\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Wenn nun die Annahme zutrifft, was eigentlich bei nicht zu großer Reibung wahrscheinlich ist, daß auch bei der Bewegung in einer reibenden Flüssigkeit die mitbewegte Flüssigkeitsmasse von der Größenordnung $V\varrho$ ist, so daß man schreiben kann, $m' = \zeta V\varrho$, wo ζ nicht allzu stark von 1 abweicht, dann wird man eine Verbesserung der Bewegungsgleichung erhalten, wenn wir m ersetzen durch $m(1 + \zeta\varepsilon)$ und darin wie bei der reibungslosen Flüssigkeit $\zeta = \frac{1}{2}$ setzen.

Berücksichtigt man die Mitbewegung der Flüssigkeit, so ergibt sich z. B. für die Fallbewegung einer Kugel in einer reibungslosen Flüssigkeit, die Beschleunigung zu $g\frac{1-\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}$ statt $g(1-\varepsilon)$, wie wir oben bei der Steinkugel angenommen hatten. Für $\varrho' = 2{,}5$ und $\varrho = 1$ wird der Faktor $\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{5}{6}$.

In unseren Rechnungen läßt sich die Berücksichtigung der mitbewegten Flüssigkeitsmasse in einfacher Weise durchführen. Da m in der reduzierten Gleichung nicht vorkommt, sondern nur in τ, genügt es, statt τ ein τ' einzuführen, welches definiert ist durch $\tau' = \tau(1 + \zeta\varepsilon)$ und mittelst dieses τ' von den reduzierten auf die wirklichen Zeiten überzugehen. Mit τ ändert sich gleichzeitig auch l, da diese Größen durch die Gleichung $l = v_c\tau$ verbunden sind. Es wird also auch statt l einzuführen sein $l' = l(1 + \zeta\varepsilon)$.

Um zu zeigen, wieviel die Berücksichtigung der mitbewegten Flüssigkeit ausgibt, sind in Tabelle IX und X für die Kugel III in Klammern auch die Werte von τ' und l' eingesetzt und in Tabelle XI Geschwindigkeiten und Wege sowohl ohne als auch mit Berücksichtigung der Mitbewegung der Flüssigkeit ausgerechnet.

F. Anwendung auf andere Körperformen.

§ 22. Wer den Überlegungen der vorangehenden Abschnitte gefolgt ist, wird leicht einsehen, daß sie sich unverändert auf Körper anderer Gestalt anwenden lassen, da sie nichts enthalten (abgesehen von den Werten für Z), was sich auf die Kugelgestalt bezieht.

Um diese Anwendungen durchzuführen, gehen wir folgendermaßen vor. Als empirische Grundlage wird benötigt die Darstellung der Widerstandskennziffer c der betreffenden Körperform als Funktion der Reynoldsschen Zahl; dabei setzen wir fest, daß die Reynoldssche Zahl definiert sein soll durch $\mathfrak{R} = \frac{a \cdot v}{\nu}$, wobei $a = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$ den Radius jenes Kreises bezeichnet, der flächengleich ist mit dem Hauptspant F des zu untersuchenden Körpers. Wir haben dann sofort die Widerstandsfunktion $Z = c\mathfrak{R}^2$ und können die in den Formeln auftretenden Funktionen G, H, K für eine Zahl von $\mathfrak{R}$- und Π-Werten ausrechnen und eventuell durch Kurven darstellen. Die Formeln der vorangehenden Abschnitte behalten dieselbe Bedeutung und gestatten dann, die reduzierten Wege, Zeiten und Geschwindigkeiten zu ermitteln.

Handelt es sich um numerische Berechnung eines konkreten Einzelfalles, so ermitteln wir zunächst den charakteristischen Widerstand der Flüssigkeit w_c, aus $w_c = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mu^2}{\varrho}$ und berechnen die reduzierte Kraft $\Pi = \frac{P}{w_c}$; aus den für dieses Π gültigen Tabellen oder Kurven entnehmen wir die zugeordneten Werte von $\mathfrak{R}$, ϑ und σ. Aus diesen Werten ergeben sich die wirklichen Geschwindigkeiten v, Zeiten t und Wege s durch Multiplikation mit v_c, τ, l, wobei diese Größen

genau so wie in den vorangehenden Abschnitten definiert sind, nämlich $v_e = \frac{v}{a}$, $\tau = \frac{2}{\pi} \frac{V \varrho'}{a \mu}$, $l = 2 \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{V}{a^2 \pi}$ wobei V das Volumen des Körpers bedeutet.

Nebenbei bemerkt, ist die Einführung der reduzierten Größen statt der wirklichen, identisch mit einer Änderung der verwendeten Maßeinheiten für Länge, Masse und Zeit; denn wählen wir statt 1 cm, 1 g, 1 sec, als Maßeinheiten, l cm, m g und τ sec, dann wird auch die Krafteinheit $\frac{m l}{\tau^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\mu^2}{\varrho} = w_e$ Dyn und die Geschwindigkeits-Einheit $\frac{l}{\tau} = \frac{v}{a} = v_e$ cm/sec, so daß dieselben Beziehungen $s = l \sigma$, $t = \tau \cdot \vartheta$, $v = v_e \Re$, $P = w_e \Pi$ erhalten werden, die wir bei Aufstellung der Gleichungen verwendet haben.

G. Zusammenfassung.

§ 23. Im ersten Teil dieser Arbeit wird der Nachweis geführt, daß die von F. M. Exner gegebene, auf energetischen Überlegungen gegründete Ableitung einer Widerstandsformel, auf einem Trugschluß beruht.

Im zweiten Teil wird der Versuch gemacht, die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit, unter Einwirkung einer konstanten Kraft angenähert zu berechnen, auf Grund der Widerstandskennziffer, wie sie als Funktion der Reynoldsschen Zahl empirisch bestimmt worden ist. Angenähert ist die Berechnung in erster Linie deshalb, weil in Ermangelung einer besseren Annahme vorausgesetzt wird, daß der Widerstand, den die Kugel bei ungleichförmiger Bewegung in der Flüssigkeit erfährt, jeweils so groß ist, wie der Widerstand, den sie bei gleichförmiger Bewegung, bei derselben Geschwindigkeit erfahren würde. In welchen Fällen diese Annäherung eine genügend gute ist, in welchen Fällen sie zu größeren Fehlern führt, muß erst durch Versuche ermittelt werden.

Es wird ausgegangen von der Bewegungsgleichung der Kugel $m \frac{dv}{dt} = P - W$, wo P die treibende Kraft und $W = c a^2 \pi \frac{\varrho v^2}{2}$ der Flüssigkeitswiderstand, der von $\Re$, dem Querschnitt der Kugel, der Dichte der Flüssigkeit und v abhängt. Diese Gleichung wird durch Einführung der „charakteristischen Geschwindigkeit", der Kugel $v_e = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu}{\varrho a}$ und des „charakteristischen Widerstandes der Flüssigkeit" $w_e = \frac{\pi}{2} \frac{\mu^2}{\varrho}$ vereinfacht. w_e hängt nur von der inneren Reibung der Flüssigkeit und ihrer Dichte, v_e außerdem noch von der Größe der Kugel ab.

Die Reynoldssche Zahl $\Re = v/v_e$ wird als „reduzierte Geschwindigkeit", d. h. als jene Zahl gedeutet, die angibt, um wievielmal größer die wirkliche Geschwindigkeit v der Kugel ist, als ihre charakteristische.

Ferner wird die „reduzierte Zeit" τ und der „reduzierte Weg" σ statt der wirklichen Zeit t und des wirklichen Weges s, dadurch eingeführt, daß $\vartheta = t/\tau$ und $\sigma = s/l$ gesetzt wird, wobei die neuen Zeit- und Wegeinheiten definiert sind durch $\tau = \frac{2}{\pi} \frac{\varrho'}{\mu} \frac{V}{a}$ und $l = \frac{2}{\pi} \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{V}{a^2}$ (V Kugelvolumen, ϱ' Dichte des Kugelmaterials). Schließlich wird noch statt der treibenden Kraft P, die „reduzierte Kraft" $\Pi = P/w_e$ und die Widerstandsfunktion $Z = c \cdot \Re^2$ eingeführt. Der Zweck dieser Einführungen ist, die Bewegungsgleichung so zu vereinfachen, daß nur mehr 1 Parameter und zwar Π auftritt. Die fünffach unendliche Mannigfaltigkeit aller Kugelprobleme wird so auf eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit reduziert.

Unter diesen Voraussetzungen nimmt die Bewegungsgleichung die Form an, $d\vartheta = \frac{d\Re}{\Pi - Z}$, wobei Π gegeben sein muß und Z als Funktion von $\Re$ aus Versuchen bekannt ist. Die numerische Integration dieser Gleichung liefert $\Re$ als Funktion von ϑ, so daß aus der zweiten Gleichung $d\sigma = \Re \, d\vartheta$ der Weg als Funktion der Zeit berechnet und damit alle Fragen beantwortet werden können, die sich auf die Bewegung der Kugel, unter Einfluß einer konstanten Kraft beziehen.

Sodann wird dazu übergegangen, eine Reihe von einfachen Fragen der Kugelbewegung zu behandeln.

Im Abschnitt B, § 11 wird allgemein die Berechnung der Grenzgeschwindigkeit, der eine Kugel unter Einfluß einer konstanten Kraft zustrebt, durchgeführt und in § 12 ein numerisches Beispiel gerechnet. Im § 13 wird die Geschwindigkeit der Regentropfen in Abhängigkeit von ihrem Radius berechnet und in befriedigender Übereinstimmung mit der Erfahrung befunden. § 14 behandelt den Einfluß der Temperatur des Mediums auf die Größe der Grenzgeschwindigkeit.

Der Abschnitt C befaßt sich mit der Abbremsung von Kugeln unter Einfluß des Flüssigkeitswiderstandes. Insbesondere wird im § 16 die endliche Bremsstrecke berechnet, auf der die

kinetische Energie der Kugel in unendlich langer Zeit auf Null absinkt.

Abschnitt D handelt von der Fallbewegung von Kugeln. Im § 18 werden die Formeln zur Berechnung von Zeit und Weg als Funktion der Geschwindigkeit gegeben und Tabellen zur Ausführung numerischer Rechnungen mitgeteilt. Im § 19 werden diese Formeln angewendet, um für 4 verschiedene Kugeln (Regentropfen $a = 0{,}05$ cm, Stahlkugel $a = 0{,}05$ cm, beide in Luft, ein Öltropfen in gleicher Größe in Wasser aufsteigend und eine Steinkugel $a = 5$ cm, welche in Wasser fällt) auszurechnen, welchen Weg sie zurücklegen müssen bzw. welche Zeit sie dazu brauchen, um die Grenzgeschwindigkeit bis auf $10\,^0/_0$, $1\,^0/_0$, $^1/_{10}\,^0/_0$ zu erreichen. Im § 20 wird für drei verschiedene Kugeln (Kork, Stahl in Luft und Stein in Wasser) Geschwindigkeit und zurückgelegter Weg numerisch ausgerechnet und mit den betreffenden Größen beim freien Fall verglichen.

Abschnitt E bringt Überlegungen, die sich auf eine Korrektur beziehen, die für die mitbewegte Flüssigkeit angebracht werden muß.

Im Abschnitt F wird gezeigt, daß sich die Betrachtungen, die in dieser Abhandlung für die Kugel gegeben worden sind, unverändert auf andere Körperformen übertragen lassen, wenn nur deren Widerstandsfunktion empirisch gegeben ist.

Herrn L. Domorazek, der mich mit großer Geduld und Ausdauer bei der Durchführung der numerischen Rechnungen unterstützt hat, bin ich dafür zu herzlichem Danke verpflichtet.

Graz, Ostern 1930.

(Eingegangen 22. April 1930.)

Über den Atomabstand in Kristallen tetraedrischer Struktur.

Von K. F. Niessen.

Zusammenfassung.

Aus den von Goldschmidt publizierten Tabellen[1]) über Atomabstände in Kristallen geht hervor, daß Kristalle des Diamanttypus nahezu denselben Atomabstand besitzen wie die des Wurtzittypus, wenn hier die Elemente aus derselben Horizontalreihe des periodischen Systems entnommen sind wie dort. Jedoch steigt der Abstand ein wenig in der Richtung vom Diamant- zum Wurtzittypus. Diese Zunahme ist, verglichen mit den gewöhnlichen Abstandsdifferenzen in Ionengittern, sehr gering; er ist kaum merkbar, wenn es sich um Verbindungen von Elementen aus der dritten und fünften Reihe handelt, wird aber deutlicher bei größerer Asymmetrie, d. h. bei einem größeren horizontalen Abstand u von der vierten Spalte des periodischen Systems, und verläuft im großen Ganzen proportional u^2. Es ist nun dieser eigenartige Verlauf des Atomabstandes, der in untenstehender Arbeit erklärt wird.

Der oben erwähnte Verlauf des Atomabstandes kann qualitativ, d. h. in seinem Vorzeichen und seiner Proportionalität mit u^2 erklärt werden, wenn wir für den Bau dieser Kristalle ein Bild benutzen, das schon mehrmals vom Verfasser[1]) angewandt wurde, vor allem um das tetraedrische Gitter als Atomgitter, nicht als Ionengitter verständlich zu machen.

Es wurde dabei im Anschluß an Grimm und Sommerfeld[2]) angenommen, daß die Elemente bei der Bildung eines tetraedrischen Gitters alle ihre äußeren Elektronen abgeben. Sie stehen im periodischen System entweder in der vierten Spalte oder an beiden Seiten davon auf einem gleichen, horizontal gemessenen Abstand u. So ist z. B. für Diamant $u = 0$, für BeO $u = 2$ usw. Kommen die Elemente vor in der p_1-ten und p_2-ten Spalte, so haben wir immer

$$4 - p_1 = u = p_2 - 4$$
$$p_1 + p_2 = 8\,. \qquad (1)$$

Überdies setzen wir immer voraus

$$p_1 < p_2\,.$$

Ein Element der einen Art ist tetraedrisch umgeben von vier Atomen der anderen Gattung und umgekehrt. Die nach Abgabe der äußeren Elektronen positiv zurückgebliebenen Atomreste (mit Ladung $+p_1 e$, $+p_2 e$) konnten mit jedem ihrer Nachbarn mittels zweier Elektronen gebunden werden. Letztere wurden wellenmechanisch verschmiert wie in einem Zweizentrenproblem. Das Auftreten scheinbar neutraler Atome beruhte dann hauptsächlich auf dem Umstand, daß im Zweizentrenproblem die Ladungswolke sich viel mehr um das stärker positiv geladene Zentrum wie um das schwächer positiv geladene anhäuft[3]).

Den Atomabstand selber können wir noch nicht berechnen. Die Elemente sind nämlich zu Edelgaskonfigurationen reduziert, deren Ab-

1) V. M. Goldschmidt, Untersuchungen über Bau und Eigenschaften von Kristallen (Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente VIII), Oslo 1927.

1) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. 29, 132, 1928, weiterhin zitiert mit I.

2) H. Grimm und A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Phys. **36**, 36, 1926.

1) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. 29, 32, 1928.

stoßung wir nicht kennen, wiewohl sie prinzipiell nach der Heitler-Londonschen Methode anzunähern wären. Diese Achterschalen sind übrigens noch kontrahiert wegen der um $p_1 e$ und $p_2 e$ zu hohen Kernladung und überdies noch polarisiert. Die Polarisation ist wegen der vielen Nachbarn aus Symmetrieüberlegungen viel geringer als in einem einzelnen Molekül. Um den erwähnten Verlauf im Atombestand zu erklären, brauchen wir nur die Änderung in der Abstoßung der positiv geladenen Edelgaskonfigurationen zu betrachten, die herrührt von einer Änderung ihrer Gesamtladungen $p_1 e$ und $p_2 e$, wenn statt $p_1 = p_2 = 4$ genommen wird

$$p_1 = 4 - u\,, \quad p_2 = 4 + u\,.$$

Die Kontraktion und die Polarisation wird dadurch auch beeinflußt, aber die Änderung in der Abstoßungskraft wird doch hauptsächlich bestimmt sein durch die Änderung (Verkleinerung) des Produkts ihrer Gesamtladungen $p_1 p_2$.

Aus diesem Grunde würde sich ein kleinerer Atomabstand bei größerem u erwarten lassen! Es fragt sich aber noch, wie die Anziehungskraft sich verhält, die von den hin- und herfliegenden Elektronen auf die positiven Atomreste ausgeübt wird. Es wird sich zeigen, daß letztere auch abnimmt und zwar stärker wie die Abstoßung, was dann den Zuwachs des Atomabstandes in der Richtung vom Diamant- zum Wurtzittypus erklärt.

In § 1 wird gezeigt, daß, wenn ein Elektron (Ladung $-e$) von zwei festen positiven Ladungen $+\frac{e}{2}$, $+\frac{e}{2}$ (die vorläufig nur mathematisch denkbar sind) angezogen wird, die Bindungskraft (= Anziehung durch das Elektron minus Abstoßung der Zentra) abnimmt, wenn die positiven Ladungen durch die positiven Ladungen $(\frac{1}{2} - p)\,e$ und $(\frac{1}{2} + p)\,e$ ersetzt werden.

Dabei wurde angenommen, daß die Zentra sich befinden auf Abstände von der Größenordnung der Atomabstände in Kristallgittern. Die Abnahme dieser Bindungskraft ist in erster Instanz dem Quadrat der Ladungsverschiebung proportional, also $(:)\,p^2$. In § 2 werden die Resultate von § 1 benutzt zur Erklärung der erwähnten Zunahme der Gitterabstände in Richtung vom Diamant- zum Wurtzittypus.

§ 1. Über die Bindungskraft eines speziellen Zweizentrenproblems (Anziehung durch das Elektron minus Abstoßung der Zentra).

Zur Untersuchung dieser Bindungskräfte betrachten wir zuerst ein Elektron, das von zwei positiv geladenen Zentren angezogen wird. Für die Ladungen wählen wir in Übereinstimmung mit unserem früheren Bilde:

$$(\tfrac{1}{2} - p)\,e \text{ und } (\tfrac{1}{2} + p)\,e\,, \qquad (2)$$

wo $p = 0$ dem symmetrischen (Diamant-) und $0 < p < \frac{1}{2}$ dem asymmetrischen (Wurtzit-)Typus entspricht. Damals verschmierten wir nämlich jedes Bindungselektron so, als ob es angezogen würde von den Ladungen

$$(p_1 - z w_1)\,e \text{ und } (p_2 - z w_2)\,e\,, \qquad (3)$$

herrührend von zwei Atomresten, die jeder von sieben Elektronen abgeschirmt wurden. Die Wolken $-w_1 e$ und $-w_2 e$ sind die Teile, worin jedes Elektron verteilt werden konnte:

$$w_1 + w_2 = 1\,,$$

weil es sich im Grundzustand hauptsächlich in der Nähe der Kerne befindet. Bei gegebenem p_1 und p_2 und bekanntem Atomabstand wurden die Größen w_1 und w_2 bestimmt aus der Forderung, daß ein Elektron im Felde der Ladungen (3) so verschmiert wird, daß links und rechts von der Mittelebene, senkrecht auf der Verbindungslinie der Zentra, gerade wiederum $-w_1 e$ und $-w_2 e$ zu liegen kommt. So ergab sich ungefähr

$$w_1 = \frac{p_1}{8}\,, \quad w_2 = \frac{p_2}{8}$$

so daß (da jeder Atomrest von 4×2 Elektronen besucht wird) die Gesamtladung der wiederum eingehüllten Atomreste verschwand:

$$p_1 - 8 w_1 = 0\,, \quad p_2 - 8 w_2 = 0$$

und ein Atomgitter entsteht.

Die Ladungen (3) sind also angenähert $p_1 e : 8$ und $p_2 e : 8$ und können in die Form (2) geschrieben werden mit

$$p = \frac{u}{8}\,. \qquad (4)$$

Wir betrachten nun die Anziehungskraft, welche vom Elektron wellenmechanisch auf zwei positive Punktladungen

$$\varkappa_1 e = (\varkappa - p)\,e\,, \quad \varkappa_2 e = (\varkappa + p)\,e \qquad (5)$$

ausgeübt wird, wenn diese auf einen Abstand

$$2c = \varepsilon a_H$$

entfernt sind ($a_H = h^2 / 4\pi^2 m e^2$ = erster Bohrscher Radius im H-Atom). Wir brauchen den Zeitmittelwert dieser Kraft:

$$\varkappa \mathfrak{P}_p\,,$$

der für beide Zentra gleich ist: denn sonst würde das Elektron nach dem Prinzip Aktion gleich Reaktion im Laufe der Zeit sich immer mehr in einer bestimmten Richtung entfernen. Nachher nehmen wir $\varkappa = \frac{1}{2}$. Sind r_1 und r_2 die Abstände

des Elektrons von den Ladungen oder „Kernen" (5), so führen wir elliptische Koordinaten ein mittels

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \quad \mu = \frac{r_1 - r_2}{2c}$$

und verstehen unter φ den Winkel zwischen der Ebene durch Elektron und beide Zentra mit einer festen Ebene durch die Kerne.

Bekanntlich gilt dann:

$$1 < \lambda < \infty \qquad -1 < \mu < +1 \qquad 0 < \varphi < 2\pi .$$

Als Schrödingerfunktion des Grundzustandes setzen wir in die Wellengleichung:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{\varkappa_1 e^2}{r_1} + \frac{\varkappa_2 e^2}{r_2}\right)\psi = 0$$

(nach Transformation auf elliptische Koordinaten) an:

$$\psi = \psi^{\mu}(\mu)\,\psi^{\lambda}(\lambda) = \frac{v_\varepsilon^{\mu}(\mu)\, v_\varepsilon^{\lambda}(\lambda)}{\sqrt{1-\mu^2}\cdot\sqrt{\lambda^2-1}} \tag{6}$$

und finden für die Funktionen $v_\varepsilon^{\mu}(\mu)$ und $v_\varepsilon^{\lambda}(\lambda)$ die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 v_\varepsilon^{\mu}}{d\mu^2} + K_\varepsilon^{\mu} v_\varepsilon^{\mu} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d^2 v_\varepsilon^{\lambda}}{d\lambda^2} + K_\varepsilon^{\lambda} v_\varepsilon^{\lambda} = 0 \tag{8}$$

mit den Abkürzungen:

$$K_\varepsilon^{\mu} = \frac{1 + [-{}_{\varkappa}A_\rho(\varepsilon) + 2\rho\varepsilon\mu + {}_{\varkappa}\gamma_\rho(\varepsilon)\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2} \tag{9}$$

$$K_\varepsilon^{\lambda} = \frac{1 + [{}_{\varkappa}A_\rho(\varepsilon) + 2\varkappa\varepsilon\lambda - {}_{\varkappa}\gamma_\rho(\varepsilon)\lambda^2](\lambda^2-1)}{(\lambda^2-1)^2} \tag{10}$$

und den Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} v_\varepsilon^{\mu}(+1) = v_\varepsilon^{\mu}(-1) &= 0; \\ v_\varepsilon^{\lambda}(1) = v_\varepsilon^{\lambda}(\infty) &= 0^{1}). \end{aligned} \tag{11}$$

Hierin ist ${}_{\varkappa}A_\rho$ eine Separationskonstante und ${}_{\varkappa}\gamma_\rho$ hängt mit dem Eigenwert E folgendermaßen zusammen:

$$E = \frac{-4\,{}_{\varkappa}\gamma_\rho(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\,\frac{e^2}{2a_H}. \tag{12}$$

In der alten Quantentheorie konnte man zur Berechnung der Bindungskraft zwei Wege einschlagen[2]). Nach der einen Methode wurde die zeitlich gemittelte Kraft ihrer Definition gemäß direkt als ein Raumintegral geschrieben, nach der anderen aus einem Variationsprozeß gefunden, wobei die Kerne langsam auseinander gebracht wurden und die Phasenintegrale nach Ehrenfests Adiabatenhypothese konstant blieben. Diese Integrale enthielten einige Parameter, worunter die Gesamtenergie ${}_{\varkappa}E_\rho$ des Elektrons; die genannte Invarianz gab die nötigen Relationen zwischen den Differentialquotienten dieser Parameter nach dem Kernabstand εa_H, um daraus mittels

$${}_{\varkappa}\overline{\mathfrak{R}}_\rho(\varepsilon) = \frac{1}{a_H}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,{}_{\varkappa}E_\rho(\varepsilon) \tag{13}$$

die Bindungskraft bestimmen zu können.

In der Wellenmechanik gibt es zwei analoge Wege. Da die Eigenfunktion des Zweizentrenproblems nicht in geschlossener Form bekannt ist, ist die direkte Methode nicht geeignet. Für die zweite haben wir das Eigenwertproblem beim Kernabstand εa_H zu vergleichen mit dem bei $(\varepsilon + d\varepsilon)a_H$. Statt der Adiabatenhypothese kommt hier die Forderung, daß die Eigenfunktionen endlich und eindeutig bleiben sollen. Beim vergrößerten Abstand lauten die Differentialgleichungen in erster Annäherung:

$$\frac{d^2 v_{\varepsilon+d\varepsilon}^{\mu}}{d\mu^2} + K_\varepsilon^{\mu} v_{\varepsilon+d\varepsilon}^{\mu} = -\left(\frac{\delta K_\varepsilon^{\mu}}{\delta\varepsilon}\right)_\varepsilon d\varepsilon \cdot v_{\varepsilon+d\varepsilon}^{\mu}$$

$$\frac{d^2 v_{\varepsilon+d\varepsilon}^{\lambda}}{d\lambda^2} + K_\varepsilon^{\lambda} v_{\varepsilon+d\varepsilon}^{\lambda} = -\left(\frac{\delta K_\varepsilon^{\lambda}}{\delta\varepsilon}\right)_\varepsilon d\varepsilon \cdot v_{\varepsilon+d\varepsilon}^{\lambda}$$

Damit die Grenzbedingungen (11) auch für die Funktionen mit Parameter $\varepsilon + d\varepsilon$ gültig bleiben, müssen die Inhomogenitäten der Differentialgleichungen orthogonal stehen auf den Eigenfunktionen der homogenen Differentialgleichungen, die man erhält beim Nullsetzen der linken Glieder. Wir fordern also in erster Näherung:

$$\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\partial K_\varepsilon^{\mu}}{\partial\varepsilon}\right)_\varepsilon (v_\varepsilon^{\mu})^2\, d\mu = 0 \tag{14}$$

$$\int_{1}^{\infty}\left(\frac{\partial K_\varepsilon^{\lambda}}{\partial\varepsilon}\right)_\varepsilon (v_\varepsilon^{\lambda})^2\, d\lambda = 0 . \tag{15}$$

Schreibt man die Differentialquotienten mittels (9) und (10) aus, so liefern (14) und (15) zwei Relationen zwischen

$$\frac{\partial\,{}_{\varkappa}A_\rho}{\partial\varepsilon} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\,{}_{\varkappa}\gamma_\rho}{\partial\varepsilon},$$

woraus bei Elimination der ersten und Anwen-

1) I. S. 133.

2) K. F. Niessen, Zur Quantentheorie des Wasserstoffmolekülions, Diss., Utrecht 1922, Abschnitt III.

dung von (6)

$$\frac{\partial\, {}_{\varkappa}\gamma_p}{\partial\,\varepsilon} = \frac{\int_{-1}^{+1}\int_{1}^{\infty}(2\,p\,\mu + 2\,\varkappa\,\lambda)\,\psi^2\,d\,\lambda\,d\,\mu}{\int_{-1}^{+1}\int_{1}^{\infty}(\lambda^2-\mu^2)\,\psi^2\,d\,\lambda\,d\,\mu} = \frac{\int \frac{2\,p\,\mu + 2\,\varkappa\,\lambda}{\lambda^2-\mu^2}\,\psi^2\,d\,\Omega}{\int \psi^2\,d\,\Omega}.$$

Der letzte Übergang war möglich nach Multiplikation der vorigen Zähler und Nenner mit 2π, oder Integration nach φ von 0 bis 2π und nach Einführung des Raumelementes:

$$d\,\Omega = (\lambda^2-\mu^2)\,d\,\lambda\,d\,\mu\,d\,\varphi\,.$$

Ersetzen wir $\varkappa$ und p durch die aus (5) folgenden Werte:

$$\varkappa = \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2}, \quad p = \frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{2}, \tag{16}$$

so ergibt sich:

$$\frac{\partial\, {}_{\varkappa}\gamma_p}{d\,\varepsilon} = -\frac{\varepsilon\, a_H}{2\,e^2}\,\frac{\int\left[\frac{-\varkappa_1 e^2}{c(\lambda+\mu)} + \frac{-\varkappa_2 e^2}{c(\lambda-\mu)}\right]\psi^2\,d\,\Omega}{\int \psi^2\,d\,\Omega} \tag{17}$$

$$= -\frac{\varepsilon\, a_H}{2\,e^2}\,\overline{\text{Pot. } E\to Z}\,,$$

wo $\overline{\text{Pot } E\to Z}$ die zeitlich gemittelte potentielle Energie des Elektrons in bezug auf die Zentra ist.

Mittels dieser Relation können wir zeigen, daß der Ansatz (13) für die Bindungskraft auch in der Wellenmechanik richtig ist. Er führt mit (12) und (17) und nachfolgenden Relation für den Zeitmittelwert der gesamten potentiellen Energie:

$$\overline{\text{Tot. Pot.}} = \overline{\text{Pot. } E\to Z} + \frac{\varkappa_1\varkappa_2 e^2}{\varepsilon\, a_H}$$

auf den Wert

$${}_{\varkappa}\overline{\mathfrak{R}}_p = \frac{-\overline{\text{Tot. Pot.}} - 2\,\overline{\text{Kin.}}}{\varepsilon\, a_H} + \frac{\varkappa_1\varkappa_2 e^2}{\varepsilon^2 a_H^2}.$$

Im Falle Coulombscher Kräfte gilt für eine stationäre Konfiguration sowohl nach der Wellenmechanik wie nach der klassischen Theorie für die Zeitmittelwerte der totalen potentiellen und der kinetischen Energie die Relation:

$$\overline{\text{Tot. Pot.}} = -2\,\overline{\text{Kin.}}.^{1})$$

Die Konfiguration ist also stationär, wenn

$${}_{\varkappa}\overline{\mathfrak{R}}_p = \frac{\varkappa_1\varkappa_2 e^2}{\varepsilon^2 a_H^2}$$

ist, d. h. wenn die Bindungskraft die Abstoßung der Kerne gerade kompensiert. Diese Abschweifung möchte erlaubt sein, erstens um die Zuverlässigkeit des Ansatzes (13) für die Anziehungskraft zu beleuchten und zweitens um vertraut zu werden mit solchen Variationsprozessen, wie wir sie nachher noch für einen anderen Zweck benutzen werden.

Wir haben also für die gemittelte Anziehungskraft des Elektrons nach (13) und (12)

$${}_{\varkappa}\overline{\mathfrak{R}}_p(\varepsilon) = \frac{e^2}{2\,a_H^2}\,\frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\left(-\frac{4\,{}_{\varkappa}\gamma_p(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right),$$

worin wir entwickeln

$${}_{\varkappa}\gamma_p(\varepsilon) = {}_{\varkappa}\gamma_0(\varepsilon) + \frac{p^2}{2}\left(\frac{\partial^2\, {}_{\varkappa}\gamma_p}{\partial\, p^2}\right)_{p=0},$$

weil man sofort einsehen kann, daß

$$\left(\frac{\partial\, {}_{\varkappa}\gamma_p}{\partial\, p}\right)_{p=0} = 0\,. \tag{18}$$

Die Gesamtenergie des Elektrons (und nach (12) ebensowenig ${}_{\varkappa}\gamma_p$) kann sich nicht ändern, wenn man statt der Zentra mit Ladungen $(\varkappa+\delta)e$, $(\varkappa-\delta)e$, wo $\delta \ll \varkappa$, Zentra mit Ladungen $(\varkappa-\delta)e$, $(\varkappa+\delta)e$ nimmt, was ja auf eine bloße Vertauschung der Zentra hinausläuft. Diese Vertauschung könnte jedoch mittels eines Differentialquotienten $\partial/\partial\, p$ bei $p=0$ beschrieben werden. Die Gleichung (18) wurde übrigens auch aus den Wellengleichungen bewiesen[1]).

Daraus folgt sofort, daß die Änderung der Bindungskraft in erster Instanz mit p^2, also nach (4) mit u^2 proportional verläuft, wenn wir vom Diamanttypus zu entsprechenden Wurtzittypen übergehen. Ob die Bindung bei gegebenem Abstand und $\varkappa = \frac{1}{2}$ größer oder kleiner wird, hängt ab vom Vorzeichen von:

$$\left.\frac{\partial^2\, {}_{1/2}\overline{\mathfrak{R}}_p}{\partial\, p^2}\right|_{p=0} = \frac{e^2}{2\,a_H^2}\left.\frac{\partial^3}{\partial\, p^2\,\partial\,\varepsilon}\left(-\frac{4\,{}_{1/2}\gamma_p^{(\varepsilon)}}{\varepsilon^2}\right)\right|_{p=0}. \tag{19}$$

Bestimmen wir also zuerst $\partial^2\, {}_{1/2}\gamma_p(\varepsilon)/\partial\, p^2$ für $p=0$. Wir denken uns dafür nicht ε, sondern p variiert von p zu $p+\delta$, $(\delta \ll p)$, und entwickeln die Eigenfunktionen ${}_{\varkappa}v^{\mu}_{p+\delta}$, ${}_{\varkappa}v^{\lambda}_{p+\delta}$ der Differentialgleichungen (7) und (8) nach der Zunahme δ von p:

$$v_\mu = v_\mu^{(0)} + v_\mu^{(1)}\,\delta + v_\mu^{(2)}\,\delta^2$$

$$v_\lambda = v_\lambda^{(0)} + v_\lambda^{(1)}\,\delta + v_\lambda^{(2)}\,\delta^2$$

und gleichfalls die in (9) und (10) definierten

1) J. Frenkel, Einführung in die Wellenmechanik, S. 147 (nach Finkelstein).

1) I. S. 136.

Größen K_μ und K_λ

$$ {}_\varkappa K^\mu_{\rho+\delta} = {}_\varkappa K^\mu_\rho + L_\mu \delta + M_\mu \delta^2 $$

$$ {}_\varkappa K^\lambda_{\rho+\delta} = {}_\varkappa K^\lambda_\rho + L_\lambda \delta + M_\lambda \delta^2 . $$

Tragen wir diese Entwicklungen in (7) und (8) ein, so müssen die Koeffizienten von δ^0, δ, δ^2 verschwinden, was neben der Differentialgleichung (7) für $v^0_\mu = {}_\varkappa v^\mu_\rho$ noch gibt:

$$ \frac{d^2 v^{(1)}_\mu}{d\mu^2} + {}_\varkappa K^\mu_\rho v^{(1)}_\mu = - L_\mu v^{(0)}_\mu \qquad (20) $$

$$ \frac{d^2 v^{(2)}_\mu}{d\mu^2} + {}_\varkappa K^\mu_\rho v^{(2)}_\mu = - L_\mu v^{(1)}_\mu - M_\mu v^{(0)}_\mu \qquad (21) $$

und analoge Gleichungen mit Index λ statt μ.

Eigentlich sollten alle $v^{(i)}_\mu$ und $v^{(i)}_\lambda$ noch die Parameter $\varkappa$ und ρ tragen, welche wir zur Erinnerung nur den Größen K^μ und K^λ angehängt haben. Die hinzugekommenen Funktionen $v^{(1)}_\mu$ und $v^{(2)}_\mu$ sind denselben Grenzbedingungen unterworfen wie $v^0_\mu = {}_\varkappa v^\mu_\rho$, denn auch ${}_\varkappa v^\mu_{\rho+\delta}$ sollte überall endlich und eindeutig sein. Letzteres ist nur garantiert, wenn:

$$ \int_{-1}^{+1} L_\mu (v^0_\mu)^2 \, d\mu = 0 \qquad (22) $$

$$ \int_{-1}^{+1} \left(L_\mu v^{(1)}_\mu v^{(0)}_\mu + M_\mu (v^0_\mu)^2 \right) d\mu = 0 , \qquad (23) $$

d. h. wenn die rechten Glieder von (20) und (21) senkrecht stehen auf den Eigenfunktionen v^0_μ der homogenen Gleichung, welche beim Nullsetzen der linken Glieder entsteht.

Analog gelten auch:

$$ \int_1^\infty L_\lambda (v^0_\lambda)^2 \, d\lambda = 0 \qquad (24) $$

$$ \int_1^\infty \left(L_\lambda v^{(1)}_\lambda v^{(0)}_\lambda + M_\lambda (v^0_\lambda)^2 \right) d\lambda = 0 . \qquad (25) $$

Die Größen L_μ, M_μ, L_λ, M_λ bestimmen sich sofort aus ${}_\varkappa K^\mu_\rho$ und ${}_\varkappa K^\lambda_\rho$ bei ein- oder zweimaliger Differentiation nach ρ. L_μ und L_λ enthalten also die ersten und M_μ und M_λ überdies noch die zweiten Ableitungen von ${}_\varkappa A_\rho$ und ${}_\varkappa \gamma_\rho$ nach ρ. Aus den Gleichungen (22) und (24) wurde früher[1]) gezeigt, daß

$$ \left. \frac{\partial\, {}_\varkappa A_\rho}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0 , \qquad \left. \frac{\partial\, {}_\varkappa \gamma_\rho}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0 . $$

Diese Glieder können wir also auch in M_μ und M_λ fortlassen, da es sich um die Berechnung handelte von $\partial^2\gamma/\partial\rho^2$ bei $\rho = 0$, so daß die Gleichungen (23) und (25) übergehen in:

$$ - \left. \frac{\partial^2\, {}_\varkappa A_\rho}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(v^0_\mu)^2}{1-\mu^2} d\mu + \left. \frac{\partial^2\, {}_\varkappa \gamma_\rho}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\mu^2}{1-\mu^2} (v^0_\mu)^2 \, d\mu = - 2\varepsilon \int_{-1}^{+1} \frac{\mu}{1-\mu^2} \frac{d}{d\rho} (v^0_\mu)^2 \Big|_{\rho=0} d\mu . $$

$$ \left. \frac{\partial^2\, {}_\varkappa A_\rho}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0} \cdot \int_1^\infty \frac{(v^0_\lambda)^2}{\lambda^2-1} d\lambda - \left. \frac{\partial^2\, {}_\varkappa \gamma_\rho}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0} \cdot \int_1^\infty \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} (v^0_\lambda)^2 \, d\lambda = 0 , $$

woraus sich nach Elimination von $\partial^2 A/\partial\rho^2$ ein Wert für $\partial^2\gamma/\partial\rho^2$ bei $\rho = 0$ ergibt.

Bestimmen wir noch mittels der auf S. 137, I, eingeführten Konstante P und der ungeraden Funktion $U(\mu)$ den Differentialquotienten:

$$ \frac{d v^2_\mu}{d\rho} = - 4\varepsilon v^2_\mu [P + U(\mu)] , $$

so erhält man schließlich nach Wiedereinführung von ψ_μ und ψ_λ (vgl. (6))

$$ \left. \frac{\partial^2\, {}_{12}\gamma_\rho}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0} = 8\varepsilon^2 \frac{\int_{-1}^{+1} \mu\, U(\mu)\, \psi^2_\mu \, d\mu}{\int_{-1}^{+1} (\mu^2 - C)\, \psi^2_\mu \, d\mu} $$

mit der Abkürzung:

$$ C = \int_1^\infty \lambda^2 \psi^2_\lambda \, d\lambda : \int_1^\infty \psi^2_\lambda \, d\lambda . $$

Für die Auswertung der auftretenden Funktionen verweisen wir auf I, S. 139 und finden hier auf analoge Weise:

$$ \left. \frac{\partial^2\, {}_{12}\gamma_\rho}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0} = \frac{4\varepsilon^2}{A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \frac{\int_0^1 \mu\, e^{A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\mu^2} \int_0^\mu e^{-A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)(1-\mu^2)} \frac{1}{1-\mu^2} d\mu \, d\mu}{\int_0^1 (C-\mu^2)\, e^{A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\mu^2} d\mu} $$

wo auch für C die l. c. gefundene Annäherung gilt (C heißt dort K). ($A(\varepsilon)$ ist die von Burrau[2]) numerisch berechnete Funktion, die in unserer Schreibweise ${}_1A_0(\varepsilon)$ heißen könnte. Wir fanden

1) I. S. 136.
2) O. Burrau, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. VII, 14, 1927.

so für

$$\varepsilon = 4,\ 2,\ 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left.\frac{\hat{c}^2\, {}_{1/2}\gamma_p(\varepsilon)}{\hat{c}\, p^2}\right|_{p=0} = 1{,}47;\ 0{,}55;\ \text{bzw. } 0.$$

Der letzte Wert hängt mit dem Umstande zusammen, daß beim Zusammenfallen der Ladungen $(\frac{1}{2}-p)e$ und $(\frac{1}{2}+p)e$ der Eigenwert mit demjenigen im Grundzustand des H-Atoms identisch wird; $E = -e^2/2a_H$, also ${}_{1/2}\gamma_p(\varepsilon) = \varepsilon^2/4$ $(\varepsilon \to 0)$ also unabhängig von p. Ziehen wir eine Kurve mit ε als Abszisse durch die drei gefundenen Punkte, so gibt die Tangente der Differentialquotienten nach ε die Werte:

$$\text{für } \varepsilon = 4,\ \text{bzw. } 2$$

$$\frac{\hat{c}}{\hat{c}\,\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left.\frac{\hat{c}^2\, {}_{1/2}\gamma_p}{\hat{c}\, p^2}\right|_{p=0}\right) = 0{,}52,\ \text{bzw. } 0{,}40 \qquad (26)$$

und dann nach (19)

$$\left.\frac{\hat{c}\, {}_{1/2}\mathfrak{R}_p}{\hat{c}\, p}\right|_{p=0} = 0,\quad \left.\frac{\hat{c}^2\, {}_{1/2}\mathfrak{R}_p}{\hat{c}\, p^2}\right|_{p=0} = -1{,}04\,\frac{e^2}{a_H^2}\ \text{bzw.} -0{,}80\,\frac{e^2}{a_H^2}.$$

Handelte es sich also (was vorläufig nur mathematisch denkbar ist) um zwei positive Ladungen $e/2$ und $e/2$ im Abstand εa_H voneinander, und ein Elektron, das sich wellenmechanisch zwischen den festgedachten Zentren hin und her bewegt, so wird die durch das Elektron auf die „Kerne" ausgeübte Anziehungskraft (zeitlich gemittelt und positiv wenn innwärts gerichtet) kleiner, wenn die Ladungen $\frac{e}{2}$ und $\frac{e}{2}$ durch $\left(\frac{1}{2}-p\right)e$ und $\left(\frac{1}{2}+p\right)e$ ersetzt werden (wenigstens für die angegebenen Werte von ε).

Die Abstoßungskraft der Zentra verkleinert sich dabei von:

$$\frac{1}{4}\,\frac{e^2}{\varepsilon^2 a_H^2} \text{ auf } \frac{1-4p^2}{4}\,\frac{e^2}{\varepsilon^2 a_H^2}.$$

Wird diese im Falle zentraler Ladungen $\varkappa_1 e$ und $\varkappa_2 e$ dargestellt durch ${}_{\varkappa}\mathfrak{R}_p(\varepsilon)$, so haben wir also für $\varepsilon = 4$ und 2:

$$\left.\frac{\hat{c}\, {}_{1/2}\mathfrak{R}_p}{\hat{c}\, p}\right|_{p=0} = 0;\quad \left.\frac{\hat{c}^2\, {}_{1/2}\mathfrak{R}_p}{\hat{c}\, p^2}\right|_{p=0} = -2\,\frac{e^2}{\varepsilon^2 a_H^2}$$

$$= -0{,}125\,\frac{e^2}{a_H^2},\ \text{bzw.} -0{,}50\,\frac{e^2}{a_H^2}.$$

Der Atomabstand in den verschiedenen tetraedrischen Kristallen variiert von 1,5 A^0 bis 2,8 A^0, also ε (wegen $a_H = 0{,}53\ A^0$) von 3 bis 6.

Für diese Abstände finden wir für die resultierende Kraft ${}_{1/2}\mathfrak{R}_p - {}_{1/2}\mathfrak{R}_p$ (positiv gerechnet, wenn nach außen gerichtet)

$$\frac{\hat{c}^2}{\hat{c}\, p^2}\left({}_{1/2}\mathfrak{R}_p - {}_{1/2}\mathfrak{R}_p\right) > 0,$$

während der erste Differentialquotient verschwindet.

§ 2. Anwendung obiger Rechnungen auf die Kristallgittertheorie.

Wir werden nun zeigen, wie diese schematisierten Berechnungen in der Theorie der genannten Kristalle dienlich sein können. Es gab dort zwei Bindungselektronen zwischen jedem Paar benachbarter Atomreste, welche wir überdies verschmierten, als ob sie sich einzeln befänden im Feld der Ladungen (3), also nach den angenäherten Werten $w_1 = p_1{:}8,\ w_2 = p_2{:}8$ im Felde von

$$\varkappa_1 e = \frac{p_1}{8}\,e,\ \varkappa_2 e = \frac{p_2}{8}\,e.$$

Die Indices des Zweizentrenproblems sind nach (16) und (1)

$$\varkappa = \frac{1}{2},\ p = \frac{p_2 - p_1}{16} = \frac{u}{8}. \qquad (27)$$

In diesem Bilde, das natürlich nur angenäherte Richtigkeit beansprucht, ist jedes Elektron also derartig verschmiert, daß es auf zwei positive Ladungen $\varkappa_1 e$, $\varkappa_2 e$ (auf dem bei der Verschmierung benutzten Abstand) eine Bindungskraft ${}_{1/2}\mathfrak{R}_p(\varepsilon)$ ausüben würde.

Nun gibt es in unserem Bilde zwei in obiger Weise verschmierte Elektronen, welche die (jedesmal von noch sechs anderen Elektronen abgeschirmten) Atomreste zu binden haben. Wir betrachten dann die Anziehungskraft, welche beide Elektronen insgesamt auf die positiven Ladungen

$$K_1 e = (p_1 - 6\,w_1)\,e = p_1 e : 4$$

$$K_2 e = (p_2 - 6\,w_2)\,e = p_2 e : 4$$

ausüben, wenn erstere verschmiert sind, wie in einem Zweizentrenproblem $\varkappa, p$ (vgl. 27).

Die Anziehungskraft ${}_{1/2}\mathfrak{R}_p(\varepsilon)$, die jedes Elektron bei der angenommenen Verschmierung auf Ladungen $p_1 e{:}8,\ p_2 e{:}8$ ausüben würde, wird also verdoppelt, wenn die Ladungen in den Zentren ersetzt werden durch die zweimal größeren $K_1 e$ und $K_2 e$ und man sich die Bewegung, also die Verschmierung, auf irgendeine Weise ungeändert denkt. Ziehen wir nun auch das andere Bindungselektron in Betracht (was ja gerade bewirkte, daß die Verschmierung der Elektronen in erster Instanz ungeändert bleiben konnte bei der gleichzeitigen Verdoppelung der positiven Ladungen), so sehen wir, daß die von beiden auf die Atomreste mit Ladungen $K_1 e$ und

$K_2 e$ ausgeübte Anziehungskraft $\overline{\mathfrak{K}}$ ungefähr beträgt:

$$\overline{\mathfrak{K}} = 4\,{}^{1}/_{4}\overline{\mathfrak{K}}_p(\varepsilon).$$

Die Abstoßung $\mathfrak{A}$ der sechsfach umhüllten Atomreste ist, wie wir schon bemerkten, nicht bekannt. Wir brauchen nur den von p abhängigen Teil um den Einfluß der Asymmetrie untersuchen zu können. Dieser Teil liegt hauptsächlich in:

$$T(\varepsilon) = \frac{K_1 K_2 e^2}{\varepsilon^2 a_H^2} = \frac{(p_1+p_2)^2-(p_2-p_1)^2}{4^3}\,\frac{e^2}{\varepsilon^2 a_H^2},$$

also nach (1)

$$T(\varepsilon) = (1-4p^2)\,\frac{e^2}{\varepsilon^2 a_H^2}, \qquad (28)$$

so daß für die resultierende (nach außen positiv gerechnete) Kraft $\mathfrak{R}(\varepsilon) = \mathfrak{A} - \overline{\mathfrak{K}}$ gilt:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(\varepsilon)}{\partial p}\bigg|_{p=0} = \frac{\partial (T - 4\,{}^{1}/_{4}\overline{\mathfrak{K}}_p)}{\partial p}\bigg|_{p=0} = 0 \text{ (nach 26)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{R}(\varepsilon)}{\partial p^2}\bigg|_{p=0} = 8\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{\partial^2\,{}^{1}/_{4}\gamma_p}{\partial p^2}\bigg|_{p=0}\right) - \frac{1}{\varepsilon^2}\right]\frac{e^2}{a_H^2} \text{ (nach 26 und 28).}$$

Werden die numerischen Werte (26) eingesetzt, so findet man bei $\varepsilon = 4$ und 2 für den Ausdruck $[- - -]$ im letzten rechten Gliede die Beträge:

$$[- - -] = +\,0{,}45, \text{ bzw. } +\,0{,}15.$$

Für die den wirklichen Kristallen entsprechenden Werte $3 < \varepsilon < 6$ gilt also für die nach außen gerichtete resultierende Kraft $\mathfrak{R}(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(\varepsilon)}{\partial p}\bigg|_{p=0} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{R}(\varepsilon)}{\partial p^2}\bigg|_{p=0} > 0,$$

d. h. daß der Atomabstand vom Diamanttypus aus in der Richtung des Wurtzittypus anwächst und zwar in erster Linie quadratisch mit dem die Asymmetrie messenden Parameter p (oder u).

Das Gleichgewicht der Atome wurde hierbei als stabil angenommen, so daß eine Vergrößerung der nach auswärts gerichteten Kraft von einer Zunahme des Atomabstandes kompensiert werden konnte.

Der besprochene Verlauf des Atomabstandes würde sich vom Standpunkt eines Ionengitters wohl nicht ohne irgendeine Willkür verstehen lassen. Nur in unserem Bilde kann eine langsame, mit der Asymmetrie quadratisch verlaufende Zunahme im Abstand erklärt werden. Den quadratischen Verlauf trägt die Auffassung eines Atomgitters schon von Hause aus in sich. Es mußte durch obige Rechnungen nur gezeigt werden, daß die Änderung des Abstandes auch das richtige Vorzeichen hatte. Noch möchten wir in bezug auf das in I entworfene und auch hier wieder mit Erfolg benutzte Bild bemerken, daß es in Übereinstimmung ist mit dem später bekannt gewordenen Pauliprinzip, denn wegen des Elektronendralles können sich gerade zwei Elektronen im Grundzustand eines Zweizentrenproblems befinden. Die Achterschalen, worauf die Atome sich reduzieren, sind bekanntlich nach dem Pauliverbot als vollständige Elektronengruppen aufzufassen, so daß sowohl die Elektronen der Atomreste als auch die Bindungselektronen dem Pauliprinzip in abgeschlossener Weise gehorchen, was unser Bild ganz einheitlich macht.

Eindhoven, Anfang März 1930. Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken.

(Eingegangen 5. April 1930.)

Über die Temperaturabhängigkeit der Kerrkonstanten von Gasen und die Ergebnisse bei Methyl- und Äthylalkohol.

Von H. A. Stuart.

(Vorläufige Mitteilung.)

Die Verwendung von Kerreffektmessungen bei Problemen des Molekülbaues (bei Fragen nach den Valenzwinkeln und der Lage des elektrischen Moments im Molekül, sowie bei der quantitativen Berechnung des optischen Polarisationsellipsoides und des Symmetriegrades[1]), gründet sich auf die Langevin-Born'sche Orientierungstheorie des Kerreffektes. Doch hat es bisher an einer direkten experimentellen Prüfung dieser Theorie gefehlt, wenn man von einer mehr qualitativen Bestätigung[2]) mittels der von Gans für Gase abgeleiteten Beziehung zwischen der Kerrkonstanten und dem Depolarisationsgrade bei der molekularen Lichtzerstreuung absieht.

Eine quantitative Prüfung ist nun durch Messungen der Temperaturabhängigkeit der Kerrkonstanten von Gasen, wie sie im Anschluß an frühere Untersuchungen mittels einer geeigneten Versuchsanordnung zwischen Zimmertemperatur und ca. 100° durchgeführt werden konnten, möglich geworden.

1) H. A. Stuart, Zeitschr. f. Phys. **55**, 358 u. **59**, 13, 1929; ferner K. L. Wolf, Briegleb und H. A. Stuart, Zeitschr. f. phys. Chem. B. 163, 1929.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **65**, 111, 1921 und ferner C. V. Raman und K. S. Krishnan, Phil. Mag. **3**, 713, 1927.

	T	$B \cdot 10^{10}$ beobachtet bei 760 mm und 589 $\mu\mu$	$B \cdot 10^{10}$ berechnet bei 760 mm und 589 $\mu\mu$	$K_e \cdot 10^{15}$ [1]) beobachtet bei 760 mm
Schwefelkohlenstoff	329,7°	3,55	3,55	20,9
	379,7°	2,57	2,62	15,2
Äthylchlorid	291,0°	9,12	9,12	53,7
	328,7°	6,43	6,34	37,9
	377,2°	4,19 ± 0,04	4,20	24,7
Methylbromid	293,0°	7,46	7,46	44,0
	368,2°	3,79 ± 0,08	3,75	22,3

1) $K_e = B \cdot \lambda$.

Untersucht wurden einmal als dipolfreies Gas Schwefelkohlenstoff, dessen Kerrkonstante auf gleiche Dichte bezogen nach der Theorie umgekehrt proportional der absoluten Temperatur verlaufen soll, und ferner zwei Dipolgase, nämlich Äthylchlorid und Methylbromid, deren Kerrkonstante, wenn man von einer geringfügigen Korrektur wegen des kleinen Anisotropiegliedes absieht (vgl. weiter unten), sich umgekehrt proportional dem Quadrate der absoluten Temperatur ändern soll.

Die Ergebnisse der Messungen sind in der Tabelle zusammengestellt.

In Spalte 2 stehen die beobachteten unter Berücksichtigung der Abweichungen von den idealen Gasgesetzen auf 760 mm umgerechneten und in Spalte 3 die nach Langevin-Born berechneten B-Werte, wobei der Wert bei der tiefsten Temperatur als richtig angenommen worden ist. Die Unsicherheit wegen der Dampfdichtekorrektur beträgt beim Vergleich der Werte bei verschiedenen Temperaturen einige pro Mille, bei CS_2 ca. 1 Proz. Ferner ist bei der Rechnung von C_2H_5Cl und CH_3Br berücksichtigt, daß wegen des bei Zimmertemperatur 3 Proz. des Dipolgliedes ausmachenden Anisotropiegliedes die Kerrkonstante bei 100° 1 Proz. größer als die proportional $\frac{1}{T^2}$ gerechnete wird. Diese Korrektur hebt sich gerade gegen die Dampfdichtekorrektur, so daß K_e genau $\sim \frac{1}{T^3}$ auf gleichen Druck bezogen verläuft. Die oftmals wiederholten Messungen von Äthylchlorid sind besonders zuverlässig.

Die Messungen bestätigen vollkommen die von der Langevin-Bornschen Orientierungstheorie bei Gasen geforderte Temperaturabhängigkeit der Kerrkonstanten.

Nachdem es jetzt möglich ist, Kerrkonstanten bis zu Temperaturen von ca. 100° zu bestimmen, wird die Zahl der im Dampfzustand meßbaren Substanzen wesentlich größer, was um so wichtiger ist, als eine quantitative Auswertung von Messungen an Flüssigkeiten mittels der Theorie von Langevin und Born vorläufig unmöglich ist (eine Ausnahme bilden vielleicht verdünnte Lösungen). Darauf und auf die Gründe, weshalb bei Flüssigkeiten eine einfache Temperaturabhängigkeit gar nicht vorhanden sein kann, soll demnächst näher eingegangen werden.

Für Methyl- und Äthylalkohol finden sich folgende Kerrkonstanten: CH_3OH $K_e < \pm 0{,}4 \cdot 10^{-15}$ bei 760 mm und 94,2°; C_2H_5OH $K_e < \pm 0{,}5 \cdot 10^{-15}$ bei 760 mm und 102,0°, d. h. beide Kerrkonstanten sind außerordentlich klein. Daraus folgt mit Sicherheit für beide Moleküle die Winkelung am Sauerstoffatom, da die Kerrkonstante beim gestreckten Molekül groß und positiv sein müßte. Wir dürfen ferner schließen, daß das Methylalkoholmolekül keine Symmetrieachse hinsichtlich seiner optischen Polarisierbarkeit, die in die Richtung OC fallen würde, besitzt, d. h. daß der auf der einen Seite von OC sitzende H-Kern die Elektronen des Pseudoatoms OH soweit herüberzieht, daß die Elektronenhülle auch nicht annähernd mehr symmetrisch zu OC bleibt. Es müßte nämlich beim Vorhandensein einer Symmetrieachse der Winkel zwischen dem elektrischen Moment und der Achse größte Polarisierbarkeit ca. 55° betragen, um mit der beobachteten ganz kleinen Kerrkonstanten in Einklang zu bleiben. Dieser Winkel ist aber nach den Vorstellungen der klassischen Strukturchemie ganz unwahrscheinlich. Wir dürfen vielmehr annehmen, daß wie Eucken und Meyer[1]) unter Benutzung dieser Vorstellungen gezeigt haben, das aus den Bindungsmomenten $\overset{-}{O}\overset{+}{H}$ und $\overset{-}{O}\overset{+}{C}$ resultierende Moment nahezu senkrecht auf OC steht. Über die Neigung der Achse größter Polarisierbarkeit zur Richtung OC läßt sich Näheres nicht aussagen.

1) A. Eucken u. L. Meyer, Physik. Zeitschr. **30**, 397, 1929.

Königsberg Pr., II. Physikalisches Institut der Universität. 23. April 1930.

(Eingegangen 24. April 1930.)

Auflösungsvermögen und Öffnungsverhältnis eines Objektives.

(Ein Demonstrationsversuch.)

Von K. Haberl.

Mit Tafel X.

Bekanntlich wächst bei gut korrigierten Objektiven das Auflösungsvermögen mit dem Öffnungsverhältnis. Um das in einer Form zu zeigen, die für eine große Physikvorlesung brauchbar ist, habe ich auf Veranlassung von Herrn Professor Zenneck folgenden Versuch gemacht.

Als Objekt dienten zwei Löcher in einer Metallfolie im Abstand 0,062 cm und vom Durchmesser 0,015 cm; sie wurden durch eine Bogenlampe mit Kondensor beleuchtet. Dieses Objekt wurde durch ein Fernrohr (Brennweite des Objektivs ca. 100 cm, Durchmesser 7,5 cm) in einer Entfernung von 310 cm anvisiert. Um das Bild, das durch die Objektivlinse bei verschiedenen Blenden vor derselben entworfen wird und das man sonst mit dem Okular subjektiv betrachtet, festzuhalten und nachher als Diapositiv projizieren zu können, habe ich es nach Entfernung des Okulars mit einer mikrophotographischen Kamera aufgenommen[1]).

Das Ergebnis ist in den Figuren 1—5 zusammengestellt.

Bei Figur 1 war der Blendendurchmesser	7,5	cm[2])
„ „ 2 „ „	„	1,43 „
„ „ 3 „ „	„	0,96 „
„ „ 4 „ „	„	0,48 „
„ „ 5 „ „	„	0,13 „.

Interessant ist, daß schon bei Blendenöffnungen, die man gewöhnlich noch nicht als eng bezeichnet, z. B. bei derjenigen von 1,43 cm (Fig. 2), die Abbildung durch Beugungserscheinungen erheblich geschädigt wird; es ist aber zu bedenken, daß bei der großen Brennweite diesem Blendendurchmesser das kleine Öffnungsverhältnis f: 70 entspricht. Bei dem kleinen Blendendurchmesser von 0,13 cm (Fig. 5) besteht zwischen Objekt und Bild überhaupt keine Ähnlichkeit mehr.

1) Dieses Verfahren wird am hiesigen Institut sehr viel verwendet, um Bilder von geringer Größe und Lichtstärke als vergrößerte Diapositive in der Vorlesung projizieren zu können (vgl. J. Zenneck, Zeitschr. f. techn. Phys. **10**, 204, 1929).

2) D. h. Objektiv ganz offen.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 19. Mai 1930.)

Die obere Grenze der Energiedichte und einige thermodynamischen Schlußfolgerungen.

Von Seitarô Suzuki.

Vor kurzem leitete ich[1]) eine etwas von der Planckschen abweichende Strahlungsformel ab, die den Begriff der oberen Grenze der Energiedichte enthält. Da die kürzlich erschienene Arbeit von Pokrowski[2]) hiermit in Verbindung steht, erscheint es immerhin gegeben, meine Ansicht auf diesem Gebiete zusammen mit einigen neueren Resultaten zu besprechen.

Es wird z. Z. stillschweigend angenommen, daß die Materie jede noch so große kinetische Energie annehmen kann. Das ist insofern richtig, als die Geschwindigkeit der Materie in der Lage ist, diejenige des Lichtes zu erreichen, wie die Relativitätstheorie lehrt. Wenn die kinetische Energie der Materie mit der Energiemenge identifiziert wird, ergibt sich daraus ebenfalls, daß beliebig viele Quanten in einer noch so kleinen Partikel auftreten können. Das kann nicht als eine Selbstverständlichkeit angesehen werden. Meines Erachtens nach muß die Annahme, daß sich Quanten in einem begrenzten Raum unbegrenzt ansammeln, a priori verworfen werden, da von der Materie angenommen werden muß, daß sie nur endliche Energiespeicherkapazität besitzt. Man mag nun sagen, daß das Nichtauftreten von überhäuften Quanten nicht zum geringsten Teil dem sehr seltenen Auftreten dieses Falles im Sinne der statistischen Mechanik zuzuschreiben ist. Die Tatsache, daß man diese Methoden allein nicht für alle atomistischen Phänomene verantwortlich machen kann, wird schon klar durch die Richtigkeit der Paulischen Einführung eines Auswahlprinzipes in die Atomphysik, um das periodische System der Elemente zu erklären.

Ich führe ein anderes Beispiel an: Die gewöhnliche Wahrscheinlichkeitstheorie kann nicht restlos aufklären, weshalb die Reihe der Elemente mit dem Uran plötzlich aufhört. Wenn ich aber die Annahme wage, daß die Energieaufspeicherung eine bestimmte Grenze nicht überschreiten kann, so ist diese Tatsache leicht zu erklären. Diese Annahme nimmt bei Verwendung des Ausdruckes „Energiedichte" eine andere, wahrscheinlich bessere Form an, und zwar:

Die Energiedichte kann nicht unendlich zunehmen.

Für diese Hypothese bietet, wie schon bemerkt, die Relativitätstheorie vielleicht die größte Schwie-

1) S. Suzuki, Proc. Phys. Math. Soc., Japan, **10**, 175, 1928; Proc. Im. Ac. **5**, 64, 1929.

2) Pokrowski, Zeitschr. f. Phys. **51**, 730, 1928.

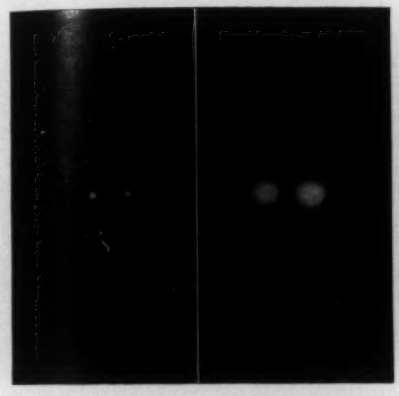

Fig. 1. Fig. 2.

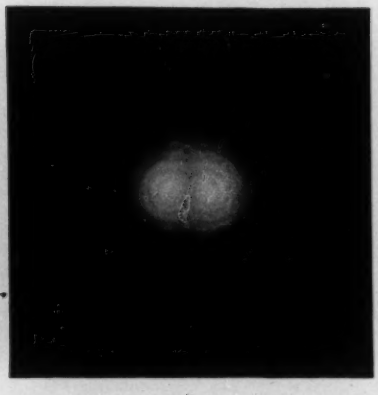

Fig. 3.

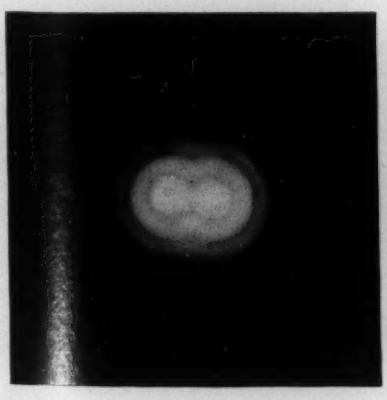

Fig. 4.

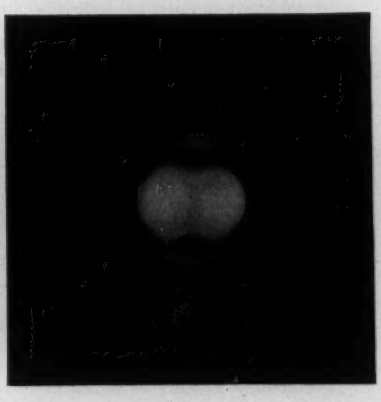

Fig. 5.

K. Haberl, Auflösungsvermögen und Öffnungsverhältnis eines Objektives. Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

rigkeit. Zur Zeit mangelt es meines Erachtens an einem entscheidenden Experiment, das klar zeigen könnte, ob die Relativitätstheorie wirklich bis zur Lichtgeschwindigkeit selbst genau gilt, oder ob diese Theorie falsch ist. Sollte es sich zeigen, daß die Materie in jeder Beziehung in Lichtquanten übergeht, sobald sie Lichtgeschwindigkeit erreicht, so muß die Relativitätstheorie derart geändert werden, daß es der Energie nicht möglich ist, unendlich zu werden, wenigstens dann nicht, wenn die Geschwindigkeit der Materie die des Lichtes wird. Trotzdem nach der Quantenmechanik Licht und Materie in bezug auf die symmetrischen Eigenschaften ihrer Wellenfunktionen vollkommen verschieden sind, so ist doch durch Davissons Versuche über die Beugung von Elektronen eine größere Annäherung denn je zwischen diesen beiden Naturerscheinungen zustandegekommen. Es wird daher vielleicht auch einmal die Zeit kommen, wo man davon überzeugt sein wird, daß eine Partikel sich in ein Lichtquantum verwandelt, und zwar unter Beibehaltung einer endlichen Energie, wenn seine Geschwindigkeit eine bestimmte Grenze überschreitet — möglicherweise im Augenblick, in dem die Lichtgeschwindigkeit erreicht wird —, um dann zu einer kleinen Korrektion der Relativitätstheorie zu führen. Momentan nimmt man an, daß diese Theorie bis zur zweiten Potenz von v/c anwendbar ist.

Ich bin der Meinung, daß die Annahme einer oberen Grenze der Energiedichte selbst vom klassischen Standpunkt aus berechtigt erscheint. Nehmen wir z. B. eine gasförmige Masse an, die in einem Gefäß eingeschlossen ist, dessen Wände aus absolut unschmelzbarem und undurchsichtigem Material bestehen, und unterwerfen wir dieses Gas einer adiabatischen Kompression mittels eines Kolbens aus gleichem Material. Mit steigender Temperatur werden die Atome nach und nach ihrer Elektronen beraubt werden, bis der Kern allein übrig bleibt. Nach der jetzt allgemein anerkannten Proutschen Hypothese hat jede weitere Erwärmung des Gases zur Folge, daß alle Kerne der verschiedenen Elemente in die zwei Arten von Urelementen, d. h. Elektronen und Protonen, zerfallen. Da neben der Temperatur der Druck noch berücksichtigt werden muß, ist der Übergang nicht so einfach; das Endprodukt bei hohen Drucken und Temperaturen wird jedoch zweifellos eine dichte Packung von Elektronen und Protonen sein, die untereinander keine nennenswerten Zwischenräume mehr aufweisen. Der durch die zunehmende Gravitation u. a. vermehrte Druck kann unmöglich noch weiter wachsen, da die Konstituenten als absolut inkompressibel und starr angesehen werden. Die Dichte der inneren Energie dieses Energiepaketes homogener Struktur, kann nunmehr als eine maximale angesehen werden. Auf die Frage, ob dieses Energiepaket so viel Licht absorbiert, daß es noch dichter wird, mag geantwortet werden, daß das Lichtquantum auch Dimensionen hat, so daß die Lichtabsorption, selbst wenn sie tatsächlich vorkommt, im wesentlichen kein Ansteigen der Energiedichte hervorruft. Ein anderes Beispiel wird dieses Problem weiter aufklären. Denken wir uns einen leeren Raum, der aus dem vorher schon erwähnten Material besteht und stark geheizt wird. Mit dem Ansteigen der Temperatur wird die Dichte der Strahlungsenergie zunehmen. Dieser Prozeß setzt sich nun aber nicht bis ins Unendliche fort, denn nach Stern entstehen im Bereich der Strahlung bei hohen Temperaturen Elektronen und Protonen, vorausgesetzt, daß Materie und Energie ineinander verwandelbar sind. So kommt man zu dem Schlusse, daß sich die ganze Strahlungsenergie bei außerordentlich hohen Temperaturen in Masse, d. h. Elektronen und Protonen, verwandelt. Dadurch wird das Problem wieder auf das erste Beispiel zurückgeführt.

Die oben beschriebenen Gedankenexperimente sind unter der Annahme ausführbar, daß die Wände des Raumes aus einem Material hergestellt sind, das für Hitze vollkommen undurchlässig ist. Diese Bedingung ist natürlich in Wirklichkeit kaum zu erfüllen.

Was die experimentellen Beweismöglichkeiten betrifft, so finden wir momentan hier noch nichts Überzeugendes; dennoch ist es eine Tatsache, daß die Frequenz oder die Geschwindigkeit verschiedener Strahlen, seien sie von radioaktiven Substanzen ausgesandt oder künstlich mittels Vakuumröhren hergestellt, nicht über eine gewisse Grenze hinausgeht. Selbst die stark durchdringenden Strahlen von Kolhörster und Millikan scheinen Anzeichen zu geben, daß sie keine unendlich große Frequenz besitzen.

Einige nun folgende Schlüsse haben nichts mit dem eben Gesagten zu tun; sie gehen unmittelbar auf die am Anfang dieser Arbeit gemachten Annahmen zurück. Zuerst betrachten wir die Statistik im Falle einer Gesamtheit von n-Resonatoren (oder Partikeln), und zwar unter der Annahme, daß die in jedem einzelnen von ihnen enthaltene Energie eine bestimmte Menge ε_m nicht übersteigen kann. Sie müssen den Bedingungen genügen

$$\sum_0^m n_s = n\,, \quad \sum_0^m s n_s \varepsilon = E\,, \tag{1}$$

n_s ist die Zahl der Resonatoren, wovon jeder einzelne die Energie $s\varepsilon$ hat, wobei ε ein Energie-

quantum und E die totale Energie ist. Die Summe geht bis m, da dies die höchste Anzahl von Quanten ist, die ein Resonator enthalten kann, und es gilt die Bedingung

$$m\varepsilon \leq \varepsilon_m < (m+1)\varepsilon .$$

Die Anzahl der Verteilungen von n-Resonatoren in Gruppen n_0, $n_1 \ldots$ (ein Komplexion) ist

$$\frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_m!} . \tag{2}$$

Die Gesamtzahl der Verteilungen von n-Resonatoren aller möglichen Komplexionen ist

$$W = \sum \frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_m!} . \tag{3}$$

Der Energieausdruck ist

$$WE = \sum \frac{(\Sigma s\varepsilon n_s)\, n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_m!} . \tag{4}$$

Gleichung (3) kann ausgewertet werden, wenn

$$f(z) = (1 + z^{\varepsilon} + z^{2\varepsilon} \cdots + z^{m\varepsilon})^n$$

oder

$$\left(\frac{1 - z^{(m+1)\varepsilon}}{1 - z^{\varepsilon}}\right)^n \tag{5}$$

in Reihe entwickelt und der Koeffizient für z^E berechnet wird. Wenn $m = \infty$ gesetzt wird, so wird Gleichung (3) zu

$$\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\, p!} , \tag{6}$$

wo

$$p = \frac{E}{\varepsilon} .$$

Das ist die bekannte Form und wurde zuerst von Planck angewandt. Gleichung (5) ist entwickelbar zu

$$\frac{1}{(1-z^{\varepsilon})^n} - \frac{n\, z^{\varepsilon(m+1)}}{(1-z^{\varepsilon})^n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{z^{2(m+1)\varepsilon}}{(1-z^{\varepsilon})^n} - \cdots$$

Daher wird die Gleichung (5),

wenn $p < m+1$ zu

$$W = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\, p!} ,$$

wenn $p \geqq m+1$ zu

$$W = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\, p!} - \frac{n(n+p-m-2)!}{(n-1)!\,(p-m-1)!} ,$$

wenn $p \geqq 2(m+1)$ zu

$$W = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\, p!} - \frac{n(n+p-m-2)!}{(n-1)!\,(p-m-1)!} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{(n+p-2m-2-1)!}{(n-1)!\,(p-2m-2)!} .$$

Als Beispiel wähle ich

$$n = 4, \quad m = 3;$$

dann ist

Tabelle I.

p	$W(m=3)$	$W(m=\infty)$	p	$W(m=3)$	$W(m=\infty)$
0	1	1	7	40	120
1	4	4	8	31	165
2	10	10	9	20	220
3	20	20	10	10	286
4	31	35	11	4	364
5	40	56	12	1	455
6	44	84	—	—	—

W erreicht seinen höchsten Wert, wenn $p = 6$, und die mittlere Energie ist dann $\frac{3\varepsilon}{2}$; gewöhnlich ist $p = \frac{mn}{2}$, und die mittlere Energie wird $\frac{m\varepsilon}{2}$, wenn mn sehr groß ist. Bevor ich mit der allgemeinen Diskussion beginne, will ich noch auf einige beachtenswerte Züge der Gesamtheit in bezug auf das gewählte Beispiel hinweisen. Wir bestimmen die Größen S und T (jedes der Entropie und Temperatur der gasförmigen Masse entsprechend) wie folgt:

$$S = k \log W , \tag{7}$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} . \tag{8}$$

An Hand Tabelle I ist klar zu sehen, daß die Temperatur erst mit zunehmender Energiedichte bis zu ∞ ansteigt, wenn die mittlere Energie den Wert $\frac{m\varepsilon}{2}$ erreicht hat; gleichzeitig ändert die Temperatur ihr Vorzeichen und geht bei weiterer Energiezunahme von $-\infty$ bis 0 (ein Stadium der größten Energieaufspeicherung $m\varepsilon$). Bequemlichkeitshalber nenne ich den ersten Gaszustand im Bereich $T > 0$ den gewöhnlichen Zustand, den zweiten Zustand $T < 0$ dagegen den außergewöhnlichen. Es ist nicht leicht festzustellen, ob das Gas in diesem außerordentlichen Zustand irgendwo in der Welt zu finden ist. Die Einführung der negativen Temperatur scheint zuerst im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Temperaturbegriff zu stehen. Die genau definierte Temperatur ist jedoch nichts weiter als ein Integrationsfaktor, um einen Wärmefluß zu einem totalen Differential zu machen. Kürzlich wurde dieser Standpunkt besonders von Carathéodory klar dargestellt, dem es zum erstenmal gelang, das zweite thermodynamische Grundgesetz logisch abzuleiten[1]).

1) M. Born, Phys. Zeitschr. **22**, 218, 1921.

Jetzt wenden wir uns der quantitativen Behandlung zu. Man erhält die genaue Lösung von Gleichung (3) und (4) durch Anwendung der komplexen Integrale von Cauchy:

$$W = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z^{E+1}}\left[\frac{1-z^{(m+1)\varepsilon}}{1-z^{\varepsilon}}\right]^n, \tag{9}$$

$$WE = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz\, z}{z^{E+1}}\frac{d}{dz}\left(\frac{1-z^{(m+1)\varepsilon}}{1-z^{\varepsilon}}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z^{E+1}}\left[\frac{1-z^{(m+1)\varepsilon}}{1-z^{\varepsilon}}\right]^n n z \frac{d}{dz}\log\left(\frac{1-z^{(m+1)\varepsilon}}{1-z^{\varepsilon}}\right) \tag{10}$$

$$W\cdot n_s = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z^{E+1}}\left[\frac{1-z^{(m+1)\varepsilon}}{1-z^{\varepsilon}}\right]^n \frac{n z^{s\varepsilon}}{\dfrac{1-z^{(m+1)\varepsilon}}{1-z^{\varepsilon}}} \tag{11}$$

Die obigen Integrale sind längs einer geschlossenen Kurve auszuführen, die den Nullpunkt $z=0$ einschließt. Ihre asymptotischen Werte findet man durch Benutzung der Sattelpunktmethode[1]). Der Integrand wird augenscheinlich bei einem zwischen 0 und 1 liegenden Punkte, sagen wir bei $z=r$, ein Minimum. Nimmt man als Kurve den Kreis vom Radius r und den Nullpunkt als Zentrum, so ist

$$z = re^{i\Theta}.$$

Das Maximum des Modulus des Integranden wird sehr groß bei $\Theta=0$, wenn n, E und m besonders groß sind. So stammt der größte Beitrag zum Integral ganz aus der Nähe dieses Punktes. Dies gilt besonders, wenn noch besondere Faktoren vorhanden sind, wie

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1-z^{(m+1)\varepsilon}}{1-z^{\varepsilon}}\right)^n$$

usw. Solche Extrafaktoren können tatsächlich aus dem Integral herausgenommen werden, wenn wir in ihm z durch r ersetzen. Die Ergebnisse sind die folgenden:

$$E = nr\frac{d}{dr}\log\left(\frac{1-r^{(m+1)\varepsilon}}{1-r^{\varepsilon}}\right) \tag{12}$$

$$n_s = \frac{nr^{s\varepsilon}}{\left(\dfrac{1-r^{(m+1)\varepsilon}}{1-r^{\varepsilon}}\right)}, \tag{13}$$

wo r die Wurzel von

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-E}\left(\frac{1-z^{(m+1)\varepsilon}}{1-z^{\varepsilon}}\right)^n\right] = 0 \tag{14}$$

ist. Aus Gleichung (13) kann man das Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsgesetz erhalten; daher ist

$$\frac{n_s}{n_t} = r^{(s-t)\varepsilon}.$$

1) R. H. Fowler, Statistical Mechanics **23**, 1929; oder Smekal, Handbuch der Physik, IX, 205, 1926.

Aus Gleichung (12) wiederum läßt sich die mittlere Energie eines Resonators berechnen

$$\bar{E} = r\frac{d}{dr}\log\left(\frac{1-r^{(m+1)\varepsilon}}{1-r^{\varepsilon}}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon r^{\varepsilon}}{1-r^{\varepsilon}} - \frac{(m+1)\varepsilon r^{(m+1)\varepsilon}}{1-r^{(m+1)\varepsilon}},$$

$\log r$ kann man als eine Funktion der Temperatur ausdrücken. Da

$$\frac{\partial W}{\partial E} = -\log r\,\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z^{E+1}}\left[\frac{1-z^{(m+1)\varepsilon}}{1-z^{\varepsilon}}\right]^n$$

aus (7) und (8)

$$\log r = -\frac{1}{kT},$$

so ist

$$\frac{n_s}{n_t} = e^{-\frac{1}{kT}(s-t)\varepsilon},$$

$$\bar{E} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1} - \frac{(m+1)\varepsilon}{e^{\frac{(m+1)\varepsilon}{kT}}-1}. \tag{15}$$

Das ist eine abgeänderte Form des Planckschen Ausdruckes für die mittlere Energie eines Resonators[1]).

Aus Gleichung (15) läßt sich für den gewöhnlichen Gaszustand folgendes errechnen:

$$\bar{E} = \frac{m\varepsilon}{2} \quad \text{wenn} \quad T=\infty$$

$$\bar{E} = 0 \quad \text{wenn} \quad T=0.$$

Natürlich muß die nötige Korrektion an zwei extremen Stellen der Temperaturskala angebracht werden, besonders beim absoluten Nullpunkt, wo sie nicht wenig von denen der Statistik (von Einstein oder Fermi) abweicht. Im Falle

1) Man kann dies auch derart ableiten, daß man $\dfrac{n!}{n_0!\,n_1!\cdots n_m!}$ zum Maximum macht. Siehe meine Arbeit, loc. cit.

des außerordentlichen Zustandes ist

$$\bar{E} = \frac{m\varepsilon}{2} \quad \text{wenn} \quad T = -\infty$$

$$\bar{E} = m\varepsilon \quad \text{wenn} \quad T = 0.$$

Es ist interessant zu beobachten, daß das Gas dieselbe Temperatur o in seinen beiden extremen Zuständen hat, sei es der Energiequanten beraubt oder mit diesen gesättigt. In diesem Falle hat die Temperatur tatsächlich nichts mit dem Energiegehalt zu tun.

Nimmt man folgende Beziehung an

$$\varepsilon = h\nu$$

so folgt daraus sofort die Strahlungsformel

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\left|\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \quad \frac{m+1}{e^{\frac{(m+1)h\nu}{kT}}-1}\right| \tag{16}$$

wo

$$mh\nu \leq \varepsilon_m < (m+1)h\nu,$$

die mittlere Energie eines Resonators, dessen Frequenz ν ist, bei $T = \infty$ wird

$$\frac{h\nu}{2}.$$

In der obigen Ableitung machte ich vom Wienschen Verschiebungsgesetz keinen Gebrauch, wie das bisher immer getan wurde. Ich benutzte nur die Planncksche Quantenbeziehung, weil dies Gesetz eine beliebig große Lichtfrequenz zuläßt — was mit unserer Annahme im Widerspruch stände. Es ist nicht ganz richtig, sich beim Ausrechnen der oberen Temperaturgrenze der bekannten Beziehung

$$u = aT^4$$

zu bedienen — wie dies von verschiedenen und auch von mir früher getan wurde —, da bei solch hoher Temperatur diese Formel einer beträchtlichen Änderung unterzogen werden muß.

Der zweite Ausdruck der neuen Strahlungsformel wird nur bei außerordentlich hohen Temperaturen oder kurzen Wellenlängen in Betracht kommen.

Im Falle eines Gases findet man die gleiche Beziehung, jedoch ist hier die Funktion $f(z)$ in ein Integral verwandelt worden. Setzt man

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right),$$

$$f(z) = \frac{1}{h^3}\int z^\varepsilon\, dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

$$= \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^{\varepsilon_m} e^{\varepsilon \log z}\,\varepsilon\, d\varepsilon \tag{17}$$

$$= \frac{4\pi}{3h^3}(2m\varepsilon_m)^{3/2} V\left\{1 - \varphi\left(\varepsilon_m \log\frac{1}{z}\right)\right\},$$

wo ε_m die obere Grenze der Energie ist, die im Molekül enthalten sein kann, und

$$\varphi(\chi) = 3\left(\frac{\chi}{5} - \frac{\chi^2}{2!\,7} + \frac{\chi^3}{3!\,9} - \cdots\right). \tag{18}$$

Wenn $\varepsilon_m \log\frac{1}{z}$ groß ist, so kann man $f(z)$ in eine semi-konvergente Reihe entwickeln.

$$f(z) = \frac{1}{h^3}\left(2\pi m \log\frac{1}{z}\right)^{3/2} V\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\psi\left(m\log\frac{1}{z}\right)\right)\right\}, \tag{19}$$

wo

$$\psi(\chi) = \frac{e^{-\chi}}{2\chi}\left(2\chi^2 + 1 - \frac{1}{2\chi^2} + \frac{1\cdot 3}{(2\chi^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2\chi^2)^3} + \cdots\right). \tag{20}$$

Die hier benutzten Ausdrücke für die kinetische Energie sind die von Newton, sollten daher dann nicht mehr benutzt werden, wenn nicht nur die Temperatur, sondern auch der Grenzwert des Energiegehaltes beträchtlich groß ist.

Man setze nun Gleichung (17) oder (18) in Gleichung (9) oder (10) ein und lasse r einen solchen Wert von z annehmen, daß der Integrand ein Maximum wird. Analoge Beziehungen wie beim Resonator gelten dann

$$\log\frac{1}{r} = -\frac{1}{kT}$$

$$\bar{E} = r\frac{d}{dr}\log f(r) = \frac{\varepsilon_m \varphi'\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)}{1 - \varphi\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)} = \frac{3}{2}kT\left|1 - \frac{e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}}{1 - \varphi\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)}\right|, \tag{21a}$$

Wenn $\frac{\varepsilon_m}{kT}$ groß ist, so ist

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT\left|1 - \frac{\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)^3 e^{-\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)}}{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\psi\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)}\right|. \tag{22b}$$

Daher ist gewöhnlich

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT,$$

außer bei etwas niedrigen Temperaturen, eine Tatsache, die stark abweicht von den Statistiken von Einstein oder Fermi. Die Entropie und freie Energie sind

$$S = kn\left\{\log \frac{4\pi}{3h^3}(2m\varepsilon_m)^{3/2} V\left(1 - \varphi\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)\right) + \frac{\bar{E}}{kT}\right\},$$

$$F = -knT\left\{\log \frac{4\pi}{3h^3}(2m\varepsilon_m)^{3/2} V\left(1 - \varphi\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)\right)\right\}.$$

Wenn $\frac{\varepsilon_m}{kT}$ groß ist, verwandeln sich die Formeln in

$$S = kn\left\{\log \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\psi\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right) + \frac{\bar{E}}{kT}\right)\right\}$$

$$F = -knT \log \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\psi\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)\right)$$

Daher ist

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{knT}{V}.$$

Dies stimmt überein mit den nach anderen Statistiken erhaltenen Werten. Die spezifische Wärme der Gase ist

$$c_v = \frac{\partial E}{\partial T} = 0{,}069\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)^2 kn,$$

wenn $\frac{\varepsilon_m}{kT}$ klein ist.

$$c_v = \frac{3}{2} kn\left\{1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)^5 e^{-\left(\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)^2}\right\},$$

wenn $\frac{\varepsilon_m}{kT}$ groß ist.

Man sieht, daß die spezifische Wärme mit steigender Temperatur abnimmt und bei $T = \infty$ verschwindet. Wenn der Hoffmannsche Wert für die durchdringende Strahlung versuchsweise als die obere Grenze der Lichtfrequenz angenommen wird, so ist der numerische Wert für c_v leicht zu finden. So wird z. B. die spezifische Wärme im ordentlichen Zustand des Gases selbst bei $T = 3 \cdot 10^{11}$ Kelvin nur um $3 \cdot 10^{-2}\,\%$ beeinflußt. Daher ist in dieser Hinsicht kaum zu erwarten, daß ein entscheidendes Experiment zur Zeit ausgeführt werden kann. Dasselbe kann von dem außerordentlichen Zustand gesagt werden, d. h. die spezifische Wärme des Gases steigt an von 0 bis $\frac{3}{2}kn$, wenn T von $-\infty$ bis 0 geht.

Wenn unsere Annahme in der Sprache der neuen Wellenmechanik ausgesprochen wird, so sollte die Endlichkeit des Energiegehaltes durch die des „Eigenwertes" ersetzt werden. Die Resultate können jedoch ganz dieselben werden, wie die eben beschriebenen.

Fukuoka, Japan, Kyushu Imperial University, Dezember 1929.

(Eingegangen 6. Mai 1930.)

Über Strobaesthesie.

Von Richard Heilbrun und Alfred Makower.

Mit Tafel XI.

Wenn sich zwei Beobachter mit der nötigen Vorsicht hintereinander in ein Wechselstromnetz von 220 Volt einschalten und jeder den Rücken seiner freien Hand gegen den des anderen legt, so empfinden beide — von einem Stromfluß von 10^{-5} Ampere an aufwärts — an den sich berührenden Handrücken ein unangenehmes Stechen. Dieses Stechen wächst mit wachsendem Strome und wird bei etwa 10^{-3} Ampere so lästig, daß der Versuch abgebrochen werden muß. Als Schutz und zur bequemen Veränderung der Stromstärke benutzt man zweckmäßig einen Drehkondensator von einigen Hundert Zentimetern Kapazität und zur Strommessung eine Gleichrichterröhre mit Gleichstromzeigern der entsprechenden Meßbereiche.

Eine neue von dem Stechen wohl unterschiedene Erscheinung tritt ein, wenn die Handrücken beider Beobachter sich, nicht ruhend, sondern

wandernd berühren, das heißt mit leichter Berührung übereinander fortgleiten.

Das Stechen hat sich jetzt verloren, für das Ströme von mindestens 10^{-5} Ampere an verantwortlich sind. An seine Stelle tritt eine andere Empfindung, die wir mit dem Ausdruck streifiges Gefühl beschreiben. Die bisher glatten Handoberflächen fühlen sich gegenseitig hart und holprig an, als ob auf ihnen streifenweise Erhöhungen und Vertiefungen entstanden wären. Es ist fast, als ob man über gerippten Sammt fortstreicht, jenen Corduroy genannten Webstoff, aus dem der Landsturm seine Uniformen erhielt. Der Unterschied des normalen zum streifigen Gefühl ist etwa der, wie er beim Entlangfahren an der gepflegten Hand einer Dame und der verarbeiteten eines Handwerkers empfunden würde oder an einem glasierten Tonscherben und einem unglasierten. Das streifige Gefühl wird noch wahrgenommen, wenn der Stromfluß auf 10^{-7}, selbst auf 10^{-8} Ampere und noch weiter gesunken ist. Offenbar wird es überhaupt nicht vom Stromfluß, sondern von der Aufladung der Handrücken durch die Wechselspannung des Netzes hervorgerufen.

Die Bedingungen für das Eintreten des streifigen Gefühls sind erstens die Verwendung von Wechselstrom — Gleichstrom kennt es nicht —, die zweite die Wanderberührung der beiden Handrücken oder der Fingerspitze, auch des Fingernagels des einen Beobachters mit dem Handrücken oder dem Nacken oder der Stirn oder der Ohrmuschel oder der trockenen Unterlippe des anderen.

Es genügt auch ein Beobachter, dessen Körper mit der einen Netzklemme verbunden ist, und der an einem gut isolierenden Griff eine über den Kondensator zur anderen Netzklemme führende Elektrode hält. Seine Haut hat das streifige Gefühl, sobald er sie mit der Elektrode wandernd berührt. Die Wanderberührung der Ohrmuschel ergibt einen leichten Summton. Strenge Bedingung in allen Fällen ist: die berührte Handfläche muß vollständig trocken sein. Die geringste Menge von Schweiß verjagt die Erscheinung.

Daß sie für verschiedene Beobachter verschieden stark fühlbar ist, nimmt nicht wunder. Das Gleiche ist auch sonst für elektrophysiologische Wirkungen bekannt, sei es, daß der Zustand der Haut, die Stärke der darunter liegenden Fettschicht oder sonstige körperliche Unterschiede der Beobachter ihre Rolle spielen. Jedenfalls ist das streifige Gefühl zweifelsfrei und immer wieder klar beobachtet. In der Literatur sind wir ihm nicht begegnet.

Man kann die Erscheinung auch sichtbar machen, wenn man die Hautfläche mit Lykopodiumsamen bestreut und zwar, nachdem man ihn zweckmäßig im Porzellantiegel mit der Bunsenflamme angebräunt hat, und mit der Elektrode oder dem Finger des zweiten Beobachters darüber fährt. Dann erhält man augenblicklich und in überraschender Weise das Streifenbild der Fig. 1, das durch dreimaliges, gleich schnelles Hinüberfahren entstanden ist. Auch auf dem Fingernagel lassen sich Streifenbilder erzeugen.

Nach dem Bisherigen muß der Leser das streifige, im Lykopodiumbild festzuhaltende Gefühl als eine recht seltene Erscheinung ansehen. Denn zu welchem Ende sollte sich jemand in einen Wechselstromkreis einschalten und ausgerechnet die trockene Haut mit dem zweiten Pol wandernd berühren? Trotzdem ist die Erscheinung gar nicht selten — und so haben wir sie entdeckt —. Die Ursache liegt in der großen Verbreitung des Wechselstromes und der bisher nicht beachteten Tatsache, daß ein elektrisches Heizkissen einen Kondensator darstellt. Heizdraht und Benutzer bilden die beiden Belegungen, die Spinn- und Webstoffe des Kissens das Dielektrikum. Rechnung und Versuch ergeben für die Kapazität unter Berücksichtigung der instabilen Natur des Heizkissens sich genügend deckende Werte. Was als Kapazität gemessen wird, sinkt mit zunehmender Trockenheit und beträgt für unsere Type *H* je nach Lage und Druck 168 bis 190 cm. Einzelheiten hierüber kann man in unserer Fabrikmitteilung Nr. 14 und in dem Bericht in Licht und Lampe Heft 3, 1930, nachlesen.

So liegt z. B. die Type *H* an einem Wechselstromnetz mit geerdetem Nullpunkt. Der einpolige Walzenschalter steht auf Null, so daß der nicht abgeschaltete Pol zur Phase führt. Das Kissen liegt auf dem Körper eines Kranken, der — im Bett — gut isoliert ist. Ein Angehöriger oder der Arzt steht, ganz wenig geerdet, neben dem Bett. Er gibt dem Kranken die Hand zum Gruße, fährt ihm streichelnd über die Stirn oder berührt ihn sonst leicht, um zu sehen, ob er Fieber habe. Kurz, er verursacht mit seiner ein wenig geerdeten Hand eine Wanderberührung der trocknen Haut des Kranken, der selbst isoliert über das Kissen als Kondensator mit dem Wechselstromnetz verbunden ist. Schon ist das streifige Gefühl da und die Besorgnis vor dem elektrisierenden Heizkissen, dem sich gut beobachtende Laien, auch die Bestimmungen des V.D.E. durchaus nicht entziehen können.

Das streifige Gefühl erklärt sich nun durch zwei Überlegungen, die sich miteinander vereinigen lassen. Die erste knüpft an die von den Herren Johnson und Rahbeck behandelte Erscheinung an, die sie in einem vor der Institution of Electrical Engineers in London am 26. Mai 1921 gehaltenen Vortrage ausführlich beschrieben

Fig. 1. Lykopodiumbild des streifigen Gefühls.

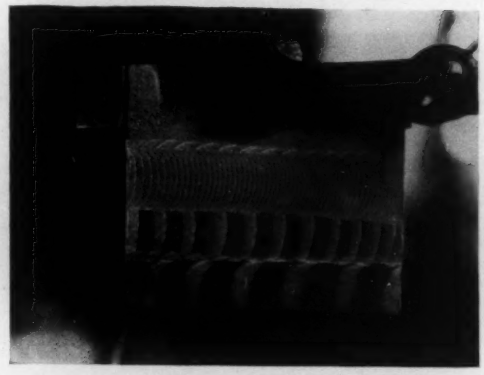

Fig. 2. Streifige Bilder auf Schiefer.

haben (siehe deren Journal Vol. 61 vom Juli 1923 und ETZ 1922, S. 587, auch Zeitschr. f. Techn. Physik 1921, S. 315). Dort handelt es sich um auffallend starke elektrostatische Anziehung zwischen Leiter und Halbleiter, bei uns um das Gleiche oder um die zwischen zwei Halbleitern. In beiden Fällen genügt die Leitfähigkeit des Halbleiters, zum Beispiel der menschlichen Haut, zur Bewegung der Ladungen und der große Widerstand auf der Oberfläche zur Verhinderung ihres Ausgleiches. Infolge dessen kann deren Luftabstand ganz außerordentlich klein und damit nach Coulomb die elektrostatische Anziehung unvermutet groß sein. Andere Spekulationen über die Natur der Halbleiter sind mäßig. Leitvermögen ausreichend zur Ladung und doch Oberflächenwiderstand ausreichend, den Ausgleich der entgegengesetzten Elektrizitäten zu verhindern. Schon kleine Mengen Feuchtigkeit verkleinern den notwendigen Oberflächenwiderstand.

Wenn dem so ist, dann sollte sich die Streifenerscheinung nicht auf die menschliche Haut beschränken, sondern in ähnlicher Weise mit andern Halbleitern wiederholen lassen. Fig. 2 zeigt sie auf einer gewöhnlichen Schiefertafel, die mit dem einen Pol eines Wechselstromnetzes verbunden und über deren Lykopodiumbelag ein mit dem zweiten Pol verbundener Leiter oder Halbleiter hingleitet. Als solche dienen gleich gut ein Kupferstab, eine Kohlebürste, ein Finger, ein mit einem Lederhandschuh bekleideter Kupferstab, ein Schiefergriffel, ein Stück Knochen, oder selbst ein frischer Pflanzenstiel.

Je schneller die Wanderberührung stattfindet, um so größer die Entfernung der Wellenkämme, die die Anhäufung des Lykopodiums auf der Schiefertafel bildet, und um so kleiner ihre Anzahl. Um festzustellen, ob die Anhäufung des Lykopodiums dem Maximal- oder dem Nullwert des Potentials entspricht, benutzt man pulsierenden Gleichstrom, der entsprechende Bilder liefert. Ein rotierender Kontakt, dessen Drehzahl leicht verstellt werden kann, erzeugt pulsierenden Gleichstrom verschiedener Unterbrechungszahl und Kontaktdauer. Bei langsamem Pulsieren sieht man an einer vorgeschalteten Lampe deutlich, daß bei der Wanderberührung die maximale statische Anziehung des Fingers den Lykopodiumsamen durch den vermehrten Auflagedruck periodisch fortwischt, der Nullwert ihn liegen läßt. Die Wellenkämme entsprechen somit den Nullwerten, die freie Tafelfläche den höheren Werten von Potential und Anziehung. Benutzt man nur einen Halbleiter und kehrt Leiter und Halbleiter um, läßt also über ein dünnes Metallblech (Zink von 0,3 mm) einen Schieferstab wandern, so hört man die Stärke der Anziehung an dem schon von Johnson und Rahbeck beobachteten Klappern. Metallblech und Schieferstab schlagen offenbar periodisch mit erheblicher Kraft gegeneinander.

Unsere Erscheinung ist aber erst zur Hälfte durch die bei Verwendung von Halbleitern auftretenden auffallend großen statischen Anziehungskräfte erklärt. Die völlige Aufklärung ergibt sich, wenn man an stroboskopische Erscheinungen denkt. Das Auge sieht in Folge der Trägheit seiner Nerven einen Körper gleichmäßig und ohne Flimmern von einer Wechselstromlichtquelle — besonders Bogen- oder Glimmlampe — beleuchtet, wenn die Periodenzahl des speisenden Wechselstromes genügend hoch ist. Weiter ist nötig, daß Lampe und Körper in Ruhe sind. Sobald sich aber eines von beiden bewegt, werden die einzelnen trägen Sehnerven nacheinander von Wechselstromlicht verschiedener Phase getroffen. Sie nehmen alsdann eine streifige Reihenfolge einzelner beleuchteter Körper und dazwischen Dunkelheit wahr.

Wir meinen, daß das streifige Hautgefühl in gleicher Weise entsteht, wie die streifigen Bilder und haben deshalb dem alten Ausdruck Stroboskopie und stroboskopische Erscheinung den neuen: Strobaesthesie und strobaesthetische Erscheinung nachgebildet. Dem Bewegungssehen entspricht nach Art seiner Entstehung das Bewegungsfühlen. Die Haut fühlt gewissermaßen durch eine Zeitlupe. Die sich sonst überlagernden Maxima und Minima des anziehenden Potentiales werden durch die Wanderberührung voneinander getrennt und jedes für sich wahrgenommen. Die Analogie von Stroboskopie und Strobaesthesie ist außerordentlich weitgehend.

(Eingegangen 26. April 1930.)

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Die Legierungen des ternären Systems Eisen—Nickel—Kobalt.

Von Heinrich Kühlewein.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Strukturdiagramm	626
Eisen	
Nickel	
Kobalt	
Die binären Systeme	627
Eisen—Nickel	
Eisen—Kobalt	
Nickel—Kobalt	
Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt	628
Polymorphe Umwandlungen	
Magnetische Umwandlungen	
Isotherme Umwandlungen	
Die A_4-Umwandlung	
Schmelzpunkte	
Zusammenfassung	
Verschiedene spezifische Eigenschaften	631
Spezifischer elektrischer Widerstand	
Thermische Leitfähigkeit	
Wärmeausdehnung	
Spezifische Wärme	
Spezifisches Gewicht	
Elastizitäts- und Torsionsmodul	
Mechanische Härte	
Magnetische Eigenschaften	634
Magnetisierungsintensität	
Permeabilität	
Koerzitivkraft, Remanenz und Hysterese-verlust	
Magnetostriktion	
Zusammenfassung	638

Folgende Arbeit soll einen Überblick geben über sämtliche bis jetzt festgestellten Eigenschaften der Legierungen des ternären Systems aus den drei ferromagnetischen Elementen Eisen, Nickel und Kobalt.

Es sei zu Anfang erwähnt, daß auf eine Beschreibung der Reinheit der Legierungen, die von den einzelnen Autoren verwendet wurden, verzichtet werden mußte, da hierauf in den meisten Arbeiten nicht oder nur unvollständig eingegangen wurde. Der Zweck dieser Arbeit soll sein, einen in der Hauptsache qualitativen Einblick in die Verhältnisse des Eisen—Nickel—Kobalt-Systems zu geben. Nicht übereinstimmende Versuchsresultate sind entweder im Text erwähnt oder aus den beigegebenen Figuren ersichtlich.

Strukturdiagramm.

Das Strukturdiagramm ist zum Verständnis der meisten Eigenschaften wichtig. Daher wird dies zum Anfang etwas eingehender behandelt.

Zuerst werden der Übersicht halber die Umwandlungspunkte der Ausgangsmetalle, dann die Strukturdiagramme der binären Legierungssysteme und zuletzt des ternären Systems beschrieben.

Eisen: Reines Eisen hat bei niedrigen Temperaturen die Form des α-Eisens, ein raumzentriert kubisches Gitter. Bei 780° findet die sogenannte A_2-Umwandlung[1]), die magnetische Umwandlung des α-Eisens in das β-Eisen statt. Das β-Eisen unterscheidet sich vom α-Eisen nach den heutigen Kenntnissen hinsichtlich der Struktur nicht, jedoch ist das β-Eisen unmagnetisch.

Man spricht jetzt häufig nur mehr von α-Eisen, magnetischem oder unmagnetischem, da ja das β-Eisen keine besondere Modifikation des Eisens darstellt. Wir wollen im folgenden ebenfalls diese Bezeichnungsweise beibehalten. Unter α-Eisen verstehen wir demnach Eisen mit raumzentriert kubischen Gitter, das seinen Curiepunkt bei 780° hat.

Bei 906° ist eine polymorphe Umwandlung, die sogenannte A_3-Umwandlung; das raumzentriert kubische Gitter des α-Eisens geht in das flächenzentriert kubische des γ-Eisens über (1). Die γ-Eisenstruktur bezeichnet man auch als „Austenit"-Struktur. Bei 1410° findet wieder eine polymorphe (A_4-)Umwandlung statt, das γ-Eisen geht über in das δ-Eisen, welches die gleiche Struktur wie α-Eisen besitzt und wie dieses oberhalb des Curiepunktes stark paramagnetisch ist (2).

Der Schmelzpunkt des Eisens ist 1530°.

Nickel: Nickel hat einen Umwandlungspunkt bei 340°, der der A_3-Umwandlung des Eisens entspricht; α-Nickel geht in das unmagnetische β-Nickel über. α- wie β-Nickel haben flächenzentriert kubisches Gitter, also „Austenit"-Struktur (3).

Von Nickel ist bis jetzt keine polymorphe Umwandlung bekannt. Die Bezeichnung α- und β-Nickel wird im folgenden, wie bei Eisen, nicht gebraucht, da die magnetische Umwandlung auch mit keiner Strukturänderung verknüpft ist. Es wird daher nur mehr von magnetischem bzw. unmagnetischem Nickel gesprochen. Vielleicht wäre es zweckmäßig das Nickel, da es die gleiche Struktur, wie das γ-Eisen besitzt, mit γ-Nickel, magnetisch und unmagnetisch, zu bezeichnen.

Der Schmelzpunkt des Nickels liegt bei 1450°.

Kobalt: Reines Kobalt hat ein hexagonales dicht gepacktes Gitter, das bei 430° (4), nach anderen Messungen (5) bei 477°, in ein flächenzentriert kubisches übergeht.

1) Die A_1-Umwandlung, die bei 767° liegt, bezieht sich auf das System Eisenkohlenstoff; sie bleibt daher im folgenden unberücksichtigt.

Wir bezeichnen das hexagonale Kobalt mit *H*-Kobalt, das flächenzentriert kubische, analog dem Eisen, mit γ-Kobalt, und die polymorphe Umwandlung mit *H*-Umwandlung.

Beide Kobaltmodifikationen sind ferromagnetisch. Die magnetische (A_2-)Umwandlung ist erst bei 1100°. Sie ist vollkommen analog der A_2-Umwandlung bei Nickel.

Der Schmelzpunkt des Kobalts ist 1480°.

Die binären Systeme.

Eisen—Nickel (Fig. 1): Von Eisen ausgehend wird bei Zimmertemperatur mit zunehmenden Nickelgehalt bis 15 Proz. *Ni* Nickel im α-Eisen homogen gelöst (Gebiet I). Bei

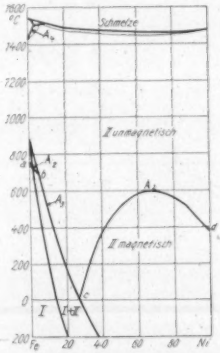

Fig. 1. Das binäre System Eisen—Nickel: Strukturdiagramm.

weiterem Zusatz von Nickel beginnt das Gebiet I + II, ein heterogenes Gemisch aus gelöstem Nickel in α-Eisen und einer festen Lösung von Nickel und γ-Eisen. Von der A_3-Umwandlungslinie ab, die von 906° bei reinem Eisen bis etwa 28 Proz. *Ni* bei Zimmertemperatur verläuft, bis zum reinen Nickel (Gebiet II) besteht eine ununterbrochene Reihe homogener Mischkristalle von γ-Eisen und Nickel.

Bei etwa 29 Proz. *Ni* und O^0 auf der A_3-Linie beginnt die magnetische (A_2-)Umwandlung im Gebiet II, die bei 65 Proz. *Ni* ein Maximum bei etwa 600° erreicht und von da nach dem A_2-Punkt von Nickel (340°) abfällt. Die A_2-Umwandlung von reinem α-Eisen erreicht mit steigendem Nickelgehalt, wie aus Fig. 1 ersichtlich ist, ihr Ende beim Schnittpunkt mit der A_3-Linie.

Der Curiepunkt oder die magnetische Umwandlung wird demnach begrenzt durch die Linien zwischen den Punkten *a—b—c—d*. Die beiden A_2-Umwandlungen bedeuten hinsichtlich der Struktur keine Änderung, während die A_3-Umwandlungslinie die endgültige Umwandlung des α-Eisens in das γ-Eisen anzeigt.

Der Schmelzpunkt des Systems Eisen-Nickel hat ein flaches Minimum bei etwa 70 Proz. Nickel.

Literatur: (3) und (6—16).

Die A_4-Umwandlung kurz vor dem Schmelzpunkt in der Eisenecke wird erst unter dem ternären System besprochen.

P. Weiß (17) schließt auf Grund seiner Magnetonentheorie und der von ihm errechneten Curieschen Konstanten auf die Verbindung Fe_3Ni. Das von oben genannten Forschern angegebene Strukturdiagramm läßt diesen Schluß jedoch nicht zu.

Eisen—Kobalt (Fig. 2): Wieder von Eisen ausgehend wird Kobalt in α-Eisen homogen gelöst, und zwar bei Raumtemperatur bis etwa 79 Proz. *Co* (Gebiet I); hier setzt längs der A_3-Linie, die der A_3-Linie im System Eisen—Nickel entspricht, das Gebiet II, eine feste Lösung von γ-Eisen und γ-Kobalt, die homogene Mischkristalle bildet und flächenzentriert kubisches Gitter hat, ein. Dieses Gebiet ist analog dem Gebiet II im Eisen—Nickel-System. Die Grenze der Gebiete I und II, die A_3-Linie, beginnt im

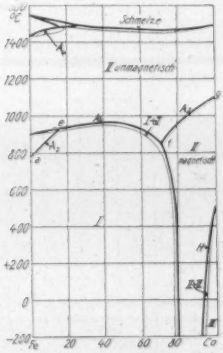

Fig. 2. Das binäre System Eisen—Kobalt: Strukturdiagramm.

A_3-Punkt des Eisens, steigt mit wachsendem Nickelgehalt wenig an, um dann steil abzufallen.

Reines Kobalt hat ein dichtgepacktes hexagonales Gitter, wie oben erwähnt, in das sich Eisen bis zu 6 Proz. homogen löst (Gebiet III). Dieses Gebiet geht in die feste homogene Lösung II zwischen 6 Proz. *Fe* bei —200° und dem polymorphen Umwandlungspunkt von Kobalt längs der *H*-Umwandlung über.

Die heterogenen Übergangsgebiete zwischen den Gebieten I und II, und III und II sind wie aus der Fig. 2 ersichtlich sehr schmal.

Bei 70 Proz. *Co* und 850° beginnt auf der A_3-Linie die magnetische (A_2-)Umwandlung im Gebiete II, die sich bis zum Curiepunkt des Kobalts bei 1100° erstreckt. Die A_2-Umwandlung im α-Gebiet in der Eisenecke erreicht bei Kobaltzusatz ähnlich wie bei Nickelzusatz bei 15 Proz. *Co* und 930° mit dem Schnittpunkt der A_3-Linie ihr Ende. Die magnetische Umwandlung wird demnach begrenzt durch die Linien zwischen den Punkten *a—e—f—g*.

Die Schmelzkurve hat ein schwaches Minimum bei etwa 65 Proz. *Co*.

Literatur: (3), (15), (18) und (19).

P. Weiß (17) und A. Preuß (20) bestimmen ähnlich Fe_2Ni die Verbindung Fe_2Co. Das Strukturdiagramm läßt diese jedoch ebenfalls nicht erkennen.

Die A_4-Umwandlung wird erst, wie schon gesagt, im „ternären System" behandelt.

Nickel—Kobalt (Fig. 3): In der Kobaltecke ist unterhalb der Linie —200°, 66 Proz. *Co* und etwa +450°, 100 Proz. *Co* (*H*-Linie) Nickel im hexagonalem Kobalt homogen gelöst. Oberhalb dieser *H*-Linie bis zu reinem Nickel ist wieder eine feste homogene austenitische (γ-)Lösung,

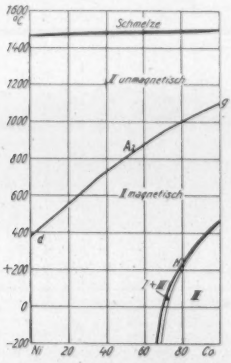

Fig. 3. Das binäre System Nickel—Kobalt: Strukturdiagramm.

d. h. eine ununterbrochene Reihe von Mischkristallen, die ein flächenzentriert kubisches Gitter aufweisen."

Dieses Gebiet (II) erfährt die magnetische Umwandlung längs der Curielinie *g—d*, die wieder mit keiner Strukturänderung verknüpft ist.

Die Schmelzkurve geht fast in einer Geraden von Schmelzpunkt des Kobalts zu dem des Nickels.

Literatur: (3), (15), (17) und (21—23).

Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt.

Das Strukturdiagramm des ternären Systems ist von T. Kasé (15) ausführlich untersucht worden. Nach der Beschreibung der drei binären Systeme ist das Gleichgewichtsdiagramm des ternären Systems leicht verständlich.

Fig. 4 stellt dieses Strukturdiagramm ohne die Schmelzpunkte räumlich dar. Als Grundfläche dient das van t'Hoffsche Dreieck, das

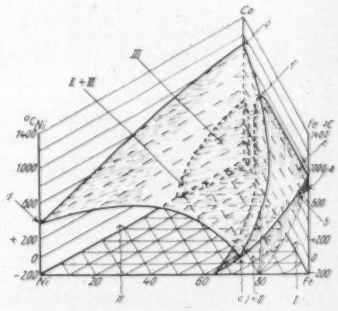

Fig. 4. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Strukturdiagramm. (Ohne Schmelzpunkte.)

die jeweilige prozentische Zusammensetzung der Legierungen abzulesen gestattet. Die Ordinate stellt die Temperatur von —200° an dar, so daß also die Grundfläche bei —200° liegt. Die Vorderfläche in der Figur ist wieder das binäre System Eisen—Nickel (spiegelbildlich zu Fig. 1), die linke hintere Fläche das binäre System Nickel—Kobalt (Fig. 3) und die rechte hintere Fläche das System Eisen—Kobalt (spiegelbildlich zu Fig. 2). Der Übersicht wegen sind die Ordinaten für die Angabe der Zusammensetzung überhaupt, sowie die Temperaturlinien vorne, im Eisen—Nickel-System, weggelassen.

Polymorphe Umwandlungen: Die Eisenecke bildet eine feste homogene Lösung von Nickel und Kobalt im raumzentriert kubischen (α-)Eisen (Gebiet I). Anschließend ist das heterogene Gemisch (I + II) aus dieser genannten festen Lösung und einer festen Lösung von Nickel, γ-Kobalt und γ-Eisen, das von der A_3-Fläche begrenzt wird. Gebiet II stellt den gesamten Raum einer ununterbrochenen Mischkristallreihe der homogenen festen Lösung

aus γ-Eisen, Nickel und γ-Kobalt dar. In der Kobaltecke befindet sich die feste homogene Lösung von Eisen und Nickel im hexagonalen Kobalt (Gebiet III). An dieses schließt sich das schmale heterogene Übergangsgebiet (II + III) von III nach II, dessen Grenze nach Gebiet II durch die H-Umwandlungsfläche gegeben ist. Quantitative Angaben sind schon in der Beschreibung der binären Systeme gegeben.

Das gesamte ternäre Legierungssystem Eisen—Nickel—Kobalt bildet demnach in der Hauptsache eine ununterbrochene Mischkristallreihe mit flächenzentriert kubischem Gitter; nur die Eisen- und die Kobaltecke haben bei niedrigen Temperaturen eine polymorphe Umwandlung.

Fig. 5 stellt einen horizontalen Schnitt durch das Strukturdiagramm des ternären Systems bei

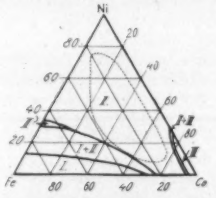

Fig. 5. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Strukturdiagramm bei gewöhnlicher Temperatur.
I. Feste Lösung von *Ni* und *Co* in α-*Fe*.
II. „ „ „ *Ni*, *Co* und γ-*Fe*. (magn.)
II'. „ „ „ *Ni*, *Co* und γ-*Fe*. (unmagn.)
III. „ „ „ *Ni* und *Fe* in hexagonalem *Co*.
------ } Gebiet der Perminvarlegierungen nach Elmen.

gewöhnlicher Temperatur dar, um die Übersicht bei der Besprechung der Eigenschaften zu erleichtern.

Magnetische Umwandlungen: Die Curiefläche (A_2) im Gebiet II beginnt an den A_3-Umwandlungslinien im γ-Gebiet der drei binären Systeme. Sie ist, wie aus Fig. 4 ersichtlich nach oben konvex; das Maximum zieht sich von Kobalt herab nach dem Maximum der A_3-Linie im Eisen—Nickel-System bei etwa 65 Proz. *Ni*. Die A_2-Fläche in der Eisenecke bildet ein kleines Dreieck (Punkte *a—b—e*). Beide A_3-Flächen finden ihr Ende an der Schnittlinie mit der A_3-Umwandlungsfläche. Zwischen diesen Schnittlinien ist die A_3-Umwandlung identisch mit der magnetischen Umwandlung. D. h. beim Übergang von der α- in die γ-Struktur wird magnetisches Material mit raumzentriert kubischem Gitter oder anders ausgedrückt Material, das unterhalb der „α-Curiefläche" liegt, umgewandelt in ein unmagnetisches Material mit flächenzentriert kubischem Gitter, d. h. Material, das über der „γ-Curiefläche" liegt.

Die magnetische Umwandlung im System Eisen—Nickel—Kobalt wird demnach begrenzt durch die Punkte *a-b-c-d-e-f-g*, d. h. durch 1. die A_2-Fläche *a-b-e*, 2. den Teil der A_3-Fläche *b-c-f-e* und 3. die große Curiefläche *c-d-g-f*.

Man bezeichnet γ-Eisen schlechthin als unmagnetisch. Bei reinem Eisen trifft dies auch zu, während γ-Eisen in homogenen Mischkristallen von γ-Eisen, Nickel und γ-Kobalt, natürlich unterhalb des Curiepunktes, durchaus als ferromagnetisch anzusprechen ist.

Isotherme Umwandlungspunkte: Fig. 6 zeigt die isothermen Umwandlungspunkte, gezeichnet nach einer Veröffentlichung von T. Kasé (15). Eingetragen sind die beiden A_2-Umwandlungen, die A_3- und die H-Umwandlung. Der Beginn der heterogenen Gebiete, von α-Eisen und hexagonalem Kobalt ausgehend, sind in der Zeichnung nicht dargestellt. Die Punkte gleicher Umwandlungstemperaturen für jede Umwandlungsart sind durch Linien miteinander verbunden und auf ein van t'Hoffsches Dreieck projiziert. Diese Darstellung hat den Vorteil großer Übersichtlichkeit; ferner sind die Umwandlungstemperaturen für jede Legierung im ternären System bei leichtem Interpolieren ohne weiteres abzulesen. Z. B. die Umwandlungstemperaturen

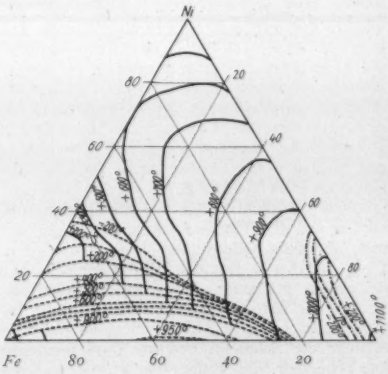

Fig. 6. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Isotherme Umwandlungspunkte.
—— A_2-Umwandlung
– – – – A_3- „
— · — · — H- „

einer Legierung von 50 Proz. *Fe*, 15 Proz. *Ni* und 35 Proz. *Co* sind: A_3-Umwandlung bei 450°, Curiepunkt bei etwa 575°. Diese Darstellung

wird daher auch bei der Besprechung der Eigenschaften des ternären Systems beibehalten.

Die A_4-Umwandlung: Es bleibt noch die A_4-Umwandlung in der Eisenecke, die bei der Besprechung der binären Systeme unberücksichtigt geblieben ist, zu beschreiben. Im Eisen—Nickel-System steigt die Temperatur der A_4-Umwandlung, der Umwandlung von γ- in δ-Eisen, mit wachsendem Nickelgehalt bis 3,5 Proz. *Ni* an. Hier (Punkt *k* in Fig. 7) tritt eine peri-

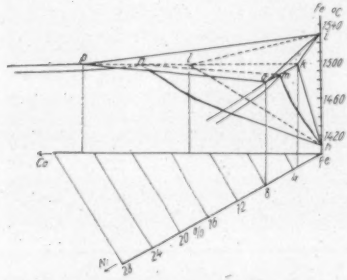

Fig. 7. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Strukturdiagramm der Eisenecke oberhalb 1400°.

tektische Reaktion bei 1510° ein, die von 3,5 und 8 Proz. *Ni* begrenzt wird — Punkte *k-m-o*. Im Eisen—Kobalt-System sind ähnliche Verhältnisse gegeben. Hier verläuft die peritektische Reaktion bei 1495° zwischen 14 und 25 Proz. *Co* (*l-n-p*). Im ternären System Eisen—Nickel—Kobalt verläuft die peritektische Reaktion längs der Linie *m-n*, die Reaktion ist also eine „einvariante" Umwandlung, während die gleiche Reaktion in den binären Systemen eine „nicht variante" Reaktion darstellt. (Siehe T. Kasé (15).) Die peritektische Temperatur fällt also allmählich von *m* nach *n* ab. Die Fläche *i-o-p* ist der „Liquidus" und *i-k-l* der „Solidus" für die feste δ-Lösung. Längs der Kurve *m-n* reagiert die Schmelze mit der festen γ-Lösung, indem direkt beim Abkühlen die feste γ-Lösung gebildet wird. Im Falle der Legierungen im Raume *i-k-l-o-p* existiert die Schmelze und die feste δ-Lösung nebeneinander, im Raume *h-i-k-l* ist nur die feste δ-Lösung vorhanden, während im Raume *h-k-l-m-n* ein Gemisch von fester γ- und δ-Lösung besteht.

Zusätze zu Eisen: Nach A. Heinzel (2) ergeben Zusätze zu Eisen von Elementen der 7., 8., 1. und 2. Gruppe des periodischen Systems eine Erweiterung des γ-Feldes, während eisenlösliche Elemente der 3.—6. Gruppe eine Verkleinerung desselben verursachen.

Dies ist auch im System Eisen—Nickel—Kobalt im allgemeinen zu beobachten. Die γ-δ-Umwandlung des Eisens steigt bei Zusatz von Nickel, Kobalt oder beiden bis zur peritektischen Temperatur, während die A_3-Umwandlungsfläche mit steigendem Zusatz stark abfällt. Lediglich im binären System Eisen—Kobalt steigt die A_3-Umwandlung mit steigendem Kobaltzusatz zu Eisen zuerst etwas an. Bei geringen Nickelzusätzen zu diesen Eisen—Kobalt-Legierungen liegt die A_3-Fläche jedoch bereits unterhalb des A_3-Punktes von Eisen.

Schmelzpunkte: Fig. 8 veranschaulicht die isothermen Schmelzpunkte des Eisen—Nickel—Kobalt-Systems (T. Kasé (15)). Der Schmelzpunkt fällt kontinuierlich von den drei Komponenten ausgehend in ein flaches „Tal", das seinerseits vom Minimum des Schmelzpunktes im Eisen—Kobalt-System zum Minimum im Eisen—Nickel-System abfällt.

Zusammenfassung: Zusammenfassend kann aus dem Strukturdiagramm des Eisen—Nickel—Kobalt-Systems gesagt werden: Es existiert weder ein binäres noch ein ternäres Eutektikum noch eine Verbindung. Sämtliche Legierungen, mit Ausnahme der Eisenecke, in der bei hohen Temperaturen zuerst ein Peritektikum in Verbindung mit einer polymorphen Umwandlung auftritt, bilden nach der vollständigen Erstarrung eine kontinuierliche feste „γ"-Lösung,

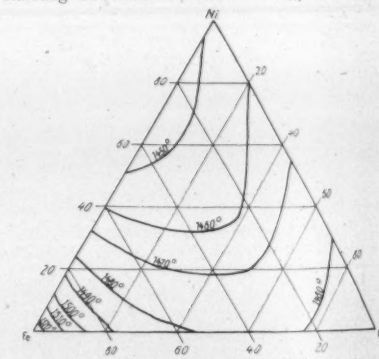

Fig. 8. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Isotherme Schmelzpunkte nach Kasé °C.

die flächenzentriert kubisches Gitter aufweist. Nach weiterem Erkalten geht diese γ-Lösung durch die magnetische Umwandlung. In der Eisen- und Kobalt-Ecke findet außerdem noch je eine polymorphe Umwandlung statt, die von teilweise erheblich breiten, heterogenen Übergangsgebieten eingeschlossen werden. Die feste

γ-Lösung geht in der Eisenecke in eine feste Lösung von raumzentriert kubischen Gitter (α-Modifikation), in der Kobaltecke in eine feste Lösung mit hexagonal dicht gepacktem Gitter über.

Verschiedene spezifische Eigenschaften.

Im Folgenden sind die verschiedensten elektrischen, thermischen und mechanischen Eigenschaften des ternären Legierungssystems Eisen—Nickel—Kobalt, soweit sie aus der Literatur entnommen werden konnten, zusammengestellt und deren Verlauf in Abhängigkeit vom Strukturdiagramm nach Möglichkeit erläutert. Wenn nicht besonders darauf hingewiesen wird, gelten alle Meßergebnisse für normale Raumtemperatur.

Spezifischer Widerstand: In Fig. 9 ist der Versuch gemacht worden, die Ergebnisse

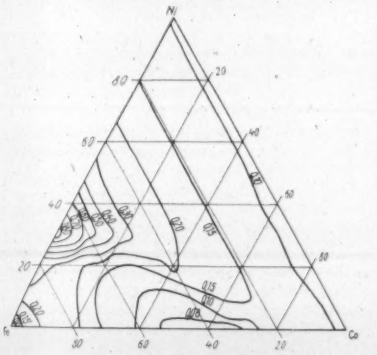

Fig. 9. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Linien gleichen spezifischen Widerstandes, $\sigma \cdot 10^4$ Ohm.

verschiedener Forscher wenigstens qualitativ zusammen aufzutragen. Es wurden hierbei die Punkte mit gleichem spezifischen Widerstande miteinander verbunden.

Vor allem fällt das hohe und spitze Maximum bei 30 Proz. *Ni* und 70 Proz. *Fe* auf. Dieses Maximum scheint sich längs der A_3-Umwandlungslinie, also nach etwa 20 Proz. *Fe*, 80 Proz. *Co* hinzuziehen, wie sich dies aus den Spitzen der einzelnen „Isoohmen", bei Vergleichung mit Fig. 5 erkennen läßt.

Der Widerstand ist nur im Gebiete der heterogenen Mischkristalle (Gebiet I und II) durch vorhergehende verschiedene Wärmebehandlungen beeinflußbar, wie dies K. Honda (24) im Eisen—Nickel-System nachweist; für den gesamten qualitativen Verlauf in Abhängigkeit von der prozentualen Zusammensetzung ist dies jedoch unwesentlich.

Im Eisen—Nickel-System steigt der Widerstand von beiden Komponenten ausgehend bis zum erwähnten Maximum bei 30 Proz. *Ni* (R. Vogel (9); K. Honda (24); F. Ribbeck (25)).

Das Nickel—Kobalt-System weist nach H. Masumoto (26) im Verlauf des spezifischen Widerstandes ein kleines Minimum bei etwa 75 Proz. *Co* auf, das jedenfalls der Umwandlung von hexagonalem in flächenzentriert kubisches Kobalt entspricht. A. Schulze (21) findet dagegen drei Minima bei etwa 20, 60 und 80 Proz. *Co*, die nach seinen Messungen auch im Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeit auftreten: Schulze schließt hieraus auf die Verbindungen Ni_4Co, Ni_2Co_3 und $NiCo_4$. Hierauf wird bei der Zusammenfassung aller Eigenschaften nochmals eingegangen werden. Weitere Literatur: G. W. Elmen (27).

Der Verlauf des Widerstandes im Eisen—Kobalt-System bringt die bis jetzt in keinem anderen Legierungssystem bekannte Erscheinung, daß der spezifische Widerstand einer Reihe von Legierungen, etwa zwischen 45 und 70 Proz. *Co*, kleiner ist als der spezifische Widerstand beider Ausgangsmetalle. Diese Anomalie wird von mehreren Forschern bestätigt (A. Schulze (21); G. W. Elmen (27); K. Honda (28)).

K. Honda findet über den ganzen Verlauf ein Minimum bei etwa 65 Proz. *Co*, während A. Schulze drei Minima, bei 33, 52 und 68 Proz. *Co* — ein viertes bei 40 Proz. *Co* erscheint zweifelhaft — findet. Die gleichen Minima treten nach Schulze auch im Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeit auf. In ähnlicher Weise wie beim Nickel—Kobalt-System schließt daher Schulze auf die Verbindungen Fe_2Co, $FeCo$, $FeCo_2$ und eventuell auch auf Fe_3Co_2. Auf die möglichen Verbindungen wird im Zusammenhang, wie oben erwähnt, später eingegangen werden.

Als sicher geht aus allen Messungen hervor, daß der spezifische Widerstand zwischen 45 und 70 Proz. *Co* kleiner ist als der beider Komponenten.

Dieses Minimum wird aus dem Vergleich mit dem Strukturdiagramm verständlich: Man darf beim Verlaufe des spezifischen Widerstandes im α-Gebiet des Eisen—Kobalt-Systems nicht den spezifischen Widerstand des hexagonalen Kobalts zum Vergleich heranziehen, sondern muß eine Legierung, deren Zusammensetzung an der A_3-Umwandlung liegt, als eine Legierung aus α-Kobalt mit 28 Proz. α-Eisen betrachten. Bei dieser Anschauungsweise fügt sich der Verlauf der Leitfähigkeit im Eisen—Kobalt-System durchaus in die bei anderen binären Legierungen bekannten Regeln.

Thermische Leitfähigkeit: Bis jetzt ist nur die thermische Leitfähigkeit der drei binären

Systeme untersucht. Nach K. Honda (24) ist der Verlauf derselben im Eisen—Nickel-System vollkommen parallel mit der elektrischen Leitfähigkeit. Auch die Beeinflußbarkeit der thermischen Leitfähigkeit durch die Wärmevorbehandlung verläuft im selben Sinne wie die der elektrischen Leitfähigkeit. Im Eisen—Kobalt-, wie auch im Nickel—Kobalt-System ist der Verlauf der thermischen ebenfalls dem der elektrischen Leitfähigkeit parallel (K. Honda (28)).

Auf der Eisen—Kobalt-Achse tritt ein starkes Maximum bei etwa 62 Proz. *Co* auf, das wieder höher als die thermische Leitfähigkeit beider Komponenten liegt, während das Nickel—Kobalt-System ein schwaches Maximum bei etwa 74 Proz. *Co* aufweist (H. Masumoto (28)). Nach vorliegenden Ergebnissen ist anzunehmen, daß der Verlauf der thermischen Leitfähigkeit auch im ganzen ternären System Eisen—Nickel—Kobalt dem der elektrischen Leitfähigkeit parallel verläuft.

Wärmeausdehnung: Der thermische Ausdehnungskoeffizient ist nur von den drei binären Systemen bekannt.

Im Eisen—Nickel-System (Fig. 10) verläuft der Ausdehnungskoeffizient, von Eisen ausgehend, im Gebiete des α-Eisens ziemlich konstant; im heterogenen Übergangsgebiete weichen die Meßergebnisse der einzelnen Forscher, wie aus der

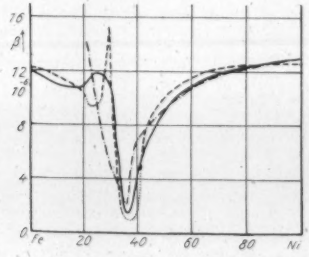

Fig. 10. Das binäre System Eisen—Nickel: Thermischer Ausdehnungskoeffizient.
— nach Honda und Miura
– – – „ Schulze
–·–·– „ Vogel.

Figur ersichtlich ist, sehr erheblich voneinander ab. Übereinstimmend wird dann in der Nähe der A_3-Umwandlung ein tiefes Minimum gefunden; von hier aus steigt sodann der Ausdehnungskoeffizient nach Nickel zu wieder an (R. Vogel (15); K. Honda u. S. Miura (29); A. Schulze (30); C. E. Guillaume (31); K. Honda u. Y. Okubo (32)).

Das tiefe Minimum der thermischen Ausdehnung liegt bei 64 Proz. *Fe* und 36 Proz. *Ni*. Diese Legierung findet in der Technik als Invar wegen ihrer geringen thermischen Ausdehnung ($\beta = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$) weitgehendste Verwendung (z.B. Uhrenpendel).

Im Eisen—Kobalt-System geht der Ausdehnungskoeffizient von Eisen nach Kobalt zuerst durch ein flaches Minimum (Fig. 11), in dem

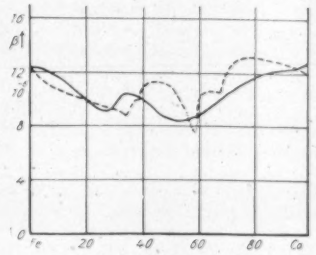

Fig. 11. Das binäre System Eisen—Kobalt: Thermischer Ausdehnungskoeffizient.
— nach Masumoto und Nava
– – – „ Schulze.

selbst ein kleines Maximum bei etwa 33 Proz. *Co* auftritt, um von da an nach Kobalt wieder anzusteigen (H. Masumoto (4); K. Honda und Y. Okubo (32); H. Masumoto u. S. Nava (33)). Nach A. Schulze (30) liegt das erwähnte Maximum bei etwa 45 Proz. *Co*. Interessant ist, daß nach den Messungen von H. Masumoto das Maximum des Temperaturkoeffizienten in Abhängigkeit von der Legierung bei steigender Temperatur zwischen 300 und 400° C zu verschwinden scheint.

Die Meßergebnisse im Eisen—Kobalt-, wie auch im Nickel—Kobalt-System (Fig. 12) (Literatur (30), (32), (33)) weichen im Verlauf der prozentischen Zusammensetzung so stark voneinander ab, daß eine einwandfreie Darstellung

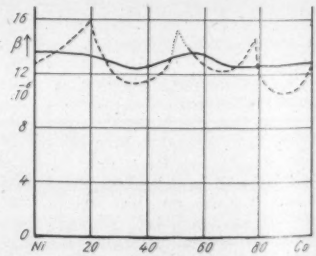

Fig. 12. Das binäre System Nickel—Kobalt: Thermischer Ausdehnungskoeffizient.
— nach Masumoto
– – – „ Schulze.

des Temperaturkoeffizienten noch nicht möglich ist.

Spezifische Wärme: Bis jetzt ist nur die spezifische Wärme des Eisen—Nickel-Systems gemessen worden (M. Kawakami (34)). Der Verlauf, der aus Fig. 13 zu ersehen ist, ist auffallenderweise annähernd entgegengesetzt dem Verlauf der Wärmeausdehnung. Im heterogenen Gebiet (I + II) ist die spezifische Wärme abhängig von der thermischen Vorbehandlung. Interessant ist das, wenn auch schwache, Minimum bei etwa 82 Proz. *Ni*, da an dieser Stelle auch andere Eigenschaften, wie noch gezeigt wird, Maxima oder Minima aufweisen.

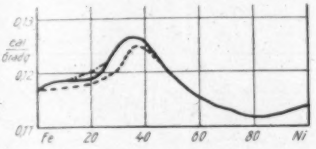

Fig. 13. Das binäre System Eisen—Nickel: Spezifische Wärme nach Kawakami.
— Normal geglüht
– – – abgekühlt in flüssiger Luft
. . . . abgeschreckt.

Spezifisches Gewicht: Das spezifische Gewicht steigt im Eisen—Nickel-System (Fig. 14) vom spezifischen Gewicht des Eisens nach dem des Nickels allmählich an; im heterogenen Gebiete hat der Verlauf eine Unstetigkeit, die wieder von der thermischen Vorbehandlung des Materials abhängig ist (A. Osawa (35, 36)). Nach A. Preuß (20) steigt im Eisen—Kobalt-System das spezifische Gewicht von Eisen nach Kobalt kontinuierlich an. Messungen im Nickel—Kobalt- oder im ternären System sind nicht bekannt, doch kann man annehmen, daß im ternären System das spezifische Gewicht von der Eisenecke ausgehend kontinuierlich, jedoch mit einer von der Vorbehandlung abhängigen Stufe im heterogenen Gebiete, erst langsam, dann rascher ansteigt.

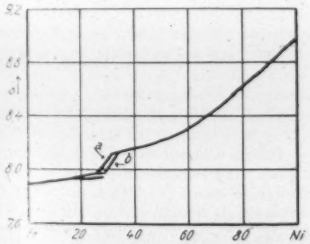

Fig. 14. Das binäre System Eisen—Nickel: Spezifisches Gewicht nach Osawa. Wärmebehandlung: a) abgekühlt in flüssiger Luft
b) „ im Ofen.

Elastizitäts- und Torsionsmodul: Der Elastizitäts- und Torsionsmodul ist ebenfalls nur von den beiden binären Systemen Eisen—Nickel und Eisen—Kobalt bekannt (C. E. Guillaume (31); K. Honda (28, 37)).

Im Eisen—Nickel-System verlaufen beide Größen parallel. Von Eisen ausgehend, tritt zuerst — im α-Gebiet — ein starker Abfall ein; im heterogenen Gebiete verlaufen die Kurven annähernd konstant, um dann am Ende desselben zu einem steilen Minimum (etwa 32 Proz. *Ni*) abzufallen. Von hier steigen die Kurven, über ein Maximum bei 84 Proz. *Ni*, nach Nickel an.

Im Eisen—Kobalt-System verläuft der Elastizitäts- wie auch der Torsionsmodul wieder von Eisen ausgehend folgendermaßen: bei etwa 10 Proz. *Co* geringes Minimum, dann flaches Maximum (Elastizitätsmodul bei etwa 26 Proz., Torsionsmodul bei etwa 34 Proz. *Co*), hierauf starker Abfall zu einem Minimum am Beginn des homogenen flächenzentriert kubischen Gebietes (für beide Größen bei 80 Proz. *Co*), und von hier wieder steiler Anstieg nach Kobalt.

Es scheint demnach, daß sich im ternären Gebiete ein Minimum des Elastizitäts- und Torsionsmoduls längs der A_3-Umwandlung hinzieht.

Mechanische Härte: T. Kasé (15) untersuchte die „skleroskopische" Härte des gesamten Eisen—Nickel—Kobalt-Systems, während A. Osawa (36) über die „Brinell"härte des Eisen-Nickel-Systems bei gewöhnlicher Temperatur Versuche anstellte. Die Resultate von Osawa laufen den Versuchsergebnissen von Kasé parallel, so daß wir uns hier auf eine Wiedergabe der Ergebnisse des letzteren beschränken können (s. Fig. 15).

Ein ausgesprochenes Härtemaximum liegt im Gebiete der heterogenen Mischkristalle (siehe Fig. 5, Gebiet I + II). Nach Nickel zu werden die Legierungen allmählich weicher. Das Gebiet des hexagonalen Kobalts weist ein zweites Maximum auf, das jedoch wesentlich unter dem Hauptmaximum bleibt. Bei diesem Maximum ist zu beachten, daß die Spitze nicht bei reinem Kobalt liegt, sondern auf der Nickel—Kobalt-Achse bei etwa 12 Proz. Nickel. — Auffallend ist das tiefe Minimum der Härte im homogenen γ-Mischkristallgebiet II auf der Eisen—Kobalt-Achse. Von Eisen ausgehend steigt die Härte mit wachsendem Nickel- und Kobaltgehalt stark an, um dann beim Übergang in das Gebiet II wieder stark abzufallen.

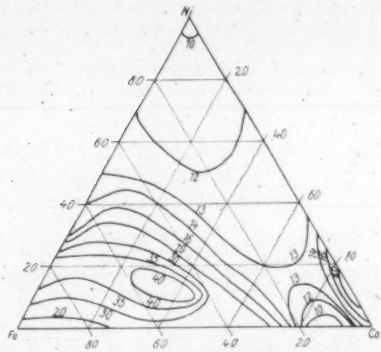

Fig. 15. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Linien gleicher skleroskopischer Härte nach Kasé in Härtegraden.

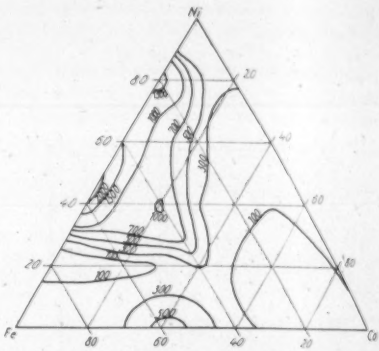

Fig. 16. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Anfangspermeabilität μ_0 für geglühte Legierungen (nach Elmen). Wärmebehandlung: 1h bei 900—1100° geglüht, dann im Ofen bis zur Raumtemperatur abgekühlt.

Magnetische Eigenschaften.

Magnetisierungsintensität: Im folgenden soll nun betrachtet werden, in welcher Weise im ganzen ternären Legierungssystem Eisen-Nickel-Kobalt bei wachsenden magnetisierenden Kräften die Magnetisierung der Legierungen zunimmt.

Zunächst gilt für ferromagnetische Substanzen allgemein folgendes: Ist das Material anfangs vollständig unmagnetisch, so nehmen wir, wenn wir bei allmählicher Steigerung der magnetisierenden Kraft (H in Gauß) die Induktion (B in Gauß) messen, die Neukurve auf. Bei sehr kleinen Feldstärken ist B proportional H, die Neukurve verläuft geradlinig, steigt dann bei wachsender Feldstärke stark an, um dann allmählich in die Sättigung überzugehen. Die Permeabilität (μ ist gleich B/H) hat demnach folgenden Verlauf: μ beginnt mit einem endlichen Wert — der Anfangspermeabilität μ_0, wenn man auf $H = 0$ extrapoliert — dieser Wert bleibt, solange B proportional H ist, konstant, steigt dann zu einem Maximum — Maximalpermeabilität μ_{max} — an, fällt dann allmählich ab und nähert sich asymptotisch dem Wert 1.

Die Anfangspermeabilität μ_0 gibt also ein Maß für die Induktion B bei kleinsten Feldstärken oder auch ein Maß für die magnetische Härte des Materials. In Fig. 16 ist die Anfangspermeabilität des Systems Eisen—Nickel—Kobalt aufgetragen, wie sie sich für Legierungen ergibt, die vor der Messung — um alle mechanischen Spannungen oder eine Vormagnetisierung zu beseitigen — bei 900—1100° geglüht und dann langsam abgekühlt wurden (H. Masumoto (3); G. W. Elmen (27); W. T. Griffiths (38); Gumlich, Steinhaus, Kußmann und Scharnow (59)). Hieraus läßt sich folgendes ersehen: Die Legierungen des heterogenen Gebietes (I und II) sowie der Kobaltecke sind schwer magnetisierbar (magnetisch sehr hart, Minimum von μ_0), die Gegend um 60 Proz. *Fe*, 40 Proz. *Co* ist etwas leichter magnetisierbar (Maximum von μ_0), während die Legierungen im γ-Gebiet nach der Eisen—Nickel-Seite immer leichter magnetisierbar werden. Auf der Eisen—Nickel-Achse sind zwei ausgesprochene Maxima vorhanden, nämlich bei etwa 45 Proz. und 79 Proz. *Ni*. Diese Gebiete sind also schon bei sehr kleinen Feldern (unter $H = 1$ Gauß) weitgehend magnetisiert. Die Kurven 16 sind einer Arbeit von G. W. Elmen (27) entnommen. H. Masumoto (3) findet noch ein weiteres Maximum der Anfangspermeabilität im γ-Gebiet auf der Eisen—Kobalt-Achse (80—94 Proz. *Co*).

Steigern wir nun die magnetisierende Kraft auf $H = 50$ Gauß, so ergibt sich ein Bild, wie es Fig. 17 darstellt. Es ist hier die Induktion B in Gauß aufgetragen. Das heterogene Gebiet (I + II) weist ein tiefes Tal auf, das seinerseits nochmals abfällt bei 30 Proz. *Ni*, 70 Proz. *Fe*, also im Gebiete, das bei normalen Temperaturen schon dicht beim magnetischen Umwandlungspunkte liegt. Die beiden Maxima auf der Eisen—Nickel-Seite sind verschwunden, das ganze γ-Gebiet scheint schon ziemlich nahe der Sättigung zu liegen. Geblieben, bzw. noch stärker ausgeprägt ist jetzt das Maxi-

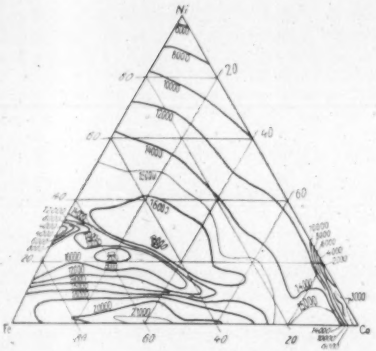

Fig. 17. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Induktion B in Gauß bei einer Feldstärke $H = 50$ Gauß. Gezeichnet nach Versuchsergebnissen von Masumoto.

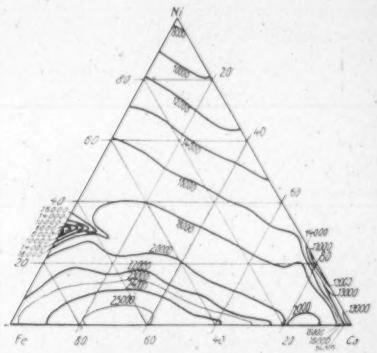

Fig. 18. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Induktion B in Gauß bei einer Feldstärke $H = 1400$ Gauß. Gezeichnet nach Versuchsergebnissen von Masumoto.

mum auf der Eisen—Kobalt-Achse bei 60 Proz. *Fe*. Dieses Gebiet ist am stärksten magnetisiert. Ein tiefes Minimum bildet das Gebiet des hexagonalen Kobalts, das sich demnach sehr schwer magnetisieren läßt.

Bei einer Feldstärke von 1400 Gauß (Fig. 18) ist das Bild viel einheitlicher. Fast das ganze ternäre Legierungssystem ist nun gesättigt. Das Tal des heterogenen Gebietes ist verschwunden, nur der Einschnitt, der bedingt ist durch den magnetischen Umwandlungspunkt, ist geblieben. Auch das Gebiet des hexagonalen Kobalts ist schon sehr weit magnetisiert, jedoch noch nicht gesättigt. In der Eisen—Kobalt-Reihe hat sich jetzt ein Maximum bei etwa 35 Proz. *Co* herausgebildet. Dieses Gebiet zeigt die stärkste Magnetisierbarkeit bei Sättigung im Eisen—Nickel—Kobalt-System.

Die Figg. 19—21 zeigen nochmals die Magnetisierungsintensität bei verschiedenen magnetisierenden Kräften der drei binären Legierungssysteme.

Im Eisen—Nickel-System steigt von Eisen ausgehend bei kleinen Nickelgehalten die Magnetisierungsintensität zuerst an. Dieses anfängliche Ansteigen ist auch in den Figg. 17 und 18 zu erkennen (H. Masumoto (3); T. Kasé (15); K. Honda (24); G. W. Elmen (27); W. T. Griffiths (38); F. Hegg (39); A. Schulze (40)). Nach F. Hegg verschwindet bei tiefen Temperaturen das Minimum der Magnetisierungsintensität (30 Proz. *Ni*), so daß beim absoluten Nullpunkt die Magnetisierungsintensität von Eisen nach Nickel kontinuierlich abfallen würde.

Im Eisen—Kobalt-System (Fig. 20) ist bei kleinen Feldstärken deutlich das oben angedeutete starke Maximum im γ-Gebiet (vgl. mit Fig. 5), wie auch das Maximum bei 50 Proz. *Co* zu erkennen. Sehr ausgeprägt zeigt sich bei höheren Feldstärken in einem kleinen Minimum das

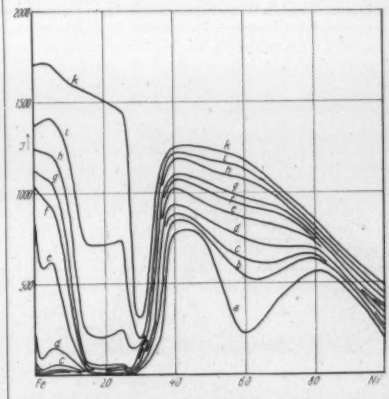

Fig. 19. Das binäre System Eisen—Nickel: Magnetisierungsintensität I bei verschiedenen Feldstärken.

a) $H = 1$	Gauß	f) $H = 7{,}5$	Gauß
b) $H = 1{,}5$	„	g) $H = 10$	„
c) $H = 2$	„	h) $H = 20$	„
d) $H = 3$	„	i) $H = 50$	„
e) $H = 5$	„	k) $H = 1400$	„

(Nach Meßergebnissen von Masumoto.)

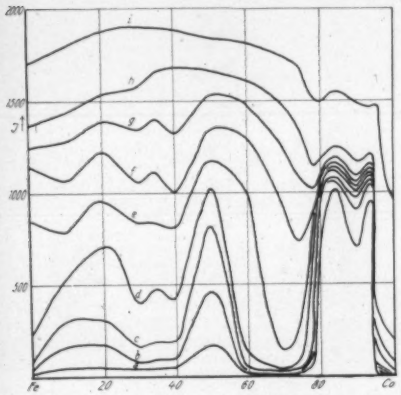

Fig. 20. Das binäre System Eisen—Kobalt: Magnetisierungsintensität I bei verschiedenen Feldstärken.

a) $H = 1$ Gauß
b) $H = 1{,}5$ „
c) $H = 2$ „
d) $H = 3$ „
e) $H = 5$ „
f) $H = 10$ Gauß
g) $H = 20$ „
h) $H = 50$ „
i) $H = 1400$ „

(Nach Meßergebnissen von Masumoto.)

heterogene Gebiet (I + II) bei etwa 80 Proz. *Co*, sowie die schwere Magnetisierbarkeit des hexagonalen Kobalts (H. Masumoto (3); T. Kasé (15); G. W. Elmen (27); K. Honda (28)).

Im Nickel—Kobalt-System (Fig. 21) ist ebenfalls die schwere Magnetisierbarkeit des hexagonalen Kobalts zu beobachten. Bei sehr hohen Feldstärken ($H = 10000$ Gauß) ist auch das hexagonale Kobalt gesättigt. Es ist anzunehmen, daß auch im ternären System bei dieser Feldstärke das Minimum in der Kobaltecke verschwunden ist. Auffallend ist das kleine Maximum bei geringen Feldstärken in der Nähe von 90 Proz. *Co* (H. Masumoto (3); H. Masumoto (26); G. W. Elmen (27); G. Tammann (41); O. Bloch (42)).

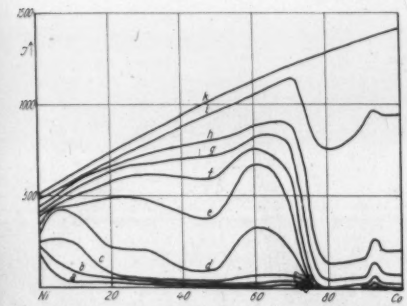

Fig. 21. Das binäre System Nickel—Kobalt: Magnetisierungsintensität I bei verschiedenen Feldstärken.

a) $H = 1$ Gauß
b) $H = 1{,}5$ „
c) $H = 2$ „
d) $H = 3$ „
e) $H = 5$ „
f) $H = 10$ Gauß
g) $H = 20$ „
h) $H = 50$ „
i) $H = 1400$ „

(Nach Meßergebnissen von Masumoto.)
k) $H = 10000$ Gauß
(Nach Bloch.)

Kleine Steigerungen der Magnetisierungsintensität bei geringen Zusätzen, wie 5 Proz. *Ni* zu Eisen (vielleicht auch 10 Proz. *Ni* zu Kobalt) treten auch bei anderen Zusätzen zu Eisen, Nickel oder Kobalt auf: Zu Eisen Silizium, Titan, Arsen, Wismut oder Bor zugesetzt bewirkt eine Erhöhung der Magnetisierungsintensität (E. Freese (43)). Bei Nickel erhält man diesen Effekt bei Zusatz von z. B. Mangam (S. Kaya und A. Kußmann (44)), bei Kobalt durch Zinn, Antimon, Chrom oder Silizium (K. Lewkonja (45); K. Honda (46)).

H. Masumoto (3) deutet dieses Verhalten bei Zusatz von Nickel zu Eisen folgendermaßen: Das Atomvolumen von Nickel ist kleiner als das von Eisen. Bei geringem Nickelzusatz zu Eisen werden Eisenatome durch Nickelatome ersetzt. Hierdurch wird die Orientierung der Eisenatome beeinflußt, das Eisengitter wird „aufgelockert", wodurch sich das Ansteigen der Magnetisierung bei kleinen Nickelgehalten erklärt. Bei größerem Nickelgehalt überwiegt schließlich das geringere magnetische Moment des Nickels und die Magnetisierungsintensität sinkt.

Permeabilität: Die Anfangspermeabilität kann durch entsprechende Wärmevorbehandlung sehr stark beeinflußt werden. Fig. 16 zeigte μ_0 nach einer Glühung bei etwa 1000° mit nachfolgender langsamer Abkühlung. Schreckt man die Legierungen jedoch von einer Temperatur oberhalb des magnetischen Umwandlungspunktes ab, so erhält man im Eisen—Nickel—Kobalt-System ein steiles Maximum der Anfangspermeabilität bei etwa 78,5 Proz. *Ni* auf der Eisennickelachse. Die Anfangspermeabilität steigt hier auf Werte bis zu $\mu_0 = 12000$ (Fig. 22) (H. Masumoto) (3); G. W. Elmen (27); W. T. Griffiths (38); E. Gumlich (47); F. Stäblein (48); T. D. Jensen (49); T. D. Jensen (50), H. D. Arnold u. G. W. Elmen (51)).

Diese Legierungen, die unter dem Namen Permalloy bekannt sind, finden in der Fernsprechtechnik weitgehendste Verwendung.

Etwa in der Mitte des γ-Gebietes kann man durch Tempern erreichen, daß der Anfang der Neukurve bis zu $H = 3$ Gauß geradlinig verläuft, daß also die Anfangspermeabilität sehr lange

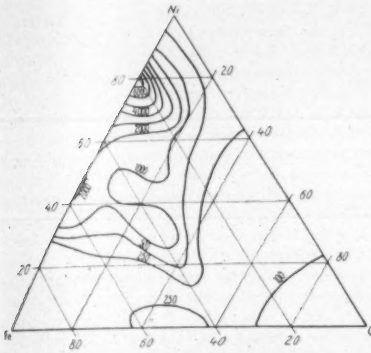

Fig. 22. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Anfangspermeabilität μ_0 für in Luft abgeschreckte Legierungen (nach Elmen). Wärmebehandlung: 1h bis 900° geglüht; im Ofen bis 625° abgekühlt; 1/4h bei 625° gehalten und dann in Luft abgeschreckt.

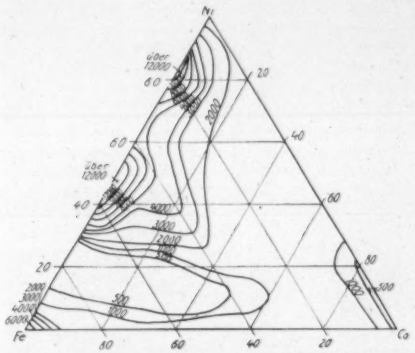

Fig. 23. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Maximalpermeabilität μ_{max} für geglühte Legierungen (nach Elmen).

konstant bleibt. Gleichzeitig erhält man eigentümliche „eingeschnürte" Hystereseschleifen, deren Entstehung noch nicht geklärt ist (G. W. Elmen (52)).

Man erhält ähnliche Schleifen, wenn man zwei ferromagnetische Materialien, deren magnetische Eigenschaften sehr verschieden sind — z. B. Kobalt und Permalloy — gleichzeitig untersucht (U. Meyer (58)). Es liegt daher die Vermutung nahe, daß die Eisen—Nickel—Kobalt-Legierungen, die solche Hystereseschleifen zeigen, aus zwei magnetisch verschiedenen Mischkristallen bestehen. Es ist jedoch bis jetzt noch auf keine Weise gelungen, dies nachzuweisen.

Legierungen mit langkonstanter Anfangspermeabilität, genannt Perminvare, werden ebenfalls in der Fernsprechtechnik angewandt. Der Bereich der Perminvare im Eisen—Nickel—Kobalt-System nach G. W. Elmen ist in Fig. 5 gestrichelt eingezeichnet.

Im Schaubild der Maximalpermeabilität für getemperte Legierungen (Fig. 23) treten wieder sehr deutlich die beiden Maxima auf der Eisen—Nickel-Seite, wie auch die schwere Magnetisierbarkeit der Legierungen des heterogenen $(\alpha + \gamma)$-Gebietes und des hexagonalen Kobalts hervor. Für abgeschreckte Legierungen verschiebt sich das Bild entsprechend der Veränderung der Anfangspermeabilität (G. W. Elmen (27)).

Koerzitivkraft, Remanenz und Hystereseverlust: Aus der Literatur sind bis jetzt noch keine vollständigen Diagramme der Koerzitivkraft und der Remanenz für das Eisen—Nickel—Kobalt-System bekannt. Ein Schaubild für den Hystereseverlust zeigt Fig. 24 (G. W. Elmen (27)). Der Verlauf des Hystereseverlustes ist etwa reziprok dem Verlauf der Maximalpermeabilität (Fig. 23) (K. Zschiesche (53); O. E. Buckley und L. W. McKeehan (54); W. T. Griffiths (38); Gumlich, Steinhaus, Kußmann und Scharnow (59)).

Magnetostriktion: Messungen über Magnetostriktion sind nur von den drei binären Legierungssystemen bekannt.

Bei reinem Eisen ist die Magnetostriktion

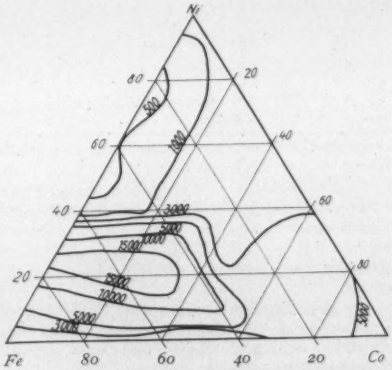

Fig. 24. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Hystereseverlust in Erg pro cm² pro Periode.

positiv, bei reinem Nickel negativ. In der Eisen—Nickel-Reihe steigt von Eisen ausgehend die Magnetostriktion zu einem Maximum an, das bei etwa 40 Proz. *Ni* liegt. Dieser Anstieg wird unterbrochen durch die Nähe des Curiepunktes, so daß bei etwa 30 Proz. *Ni* ein scharfer Einschnitt in dem genannten Anstieg der Magnetostriktion liegt. Von dem Maximum fällt die Magnetostriktion kontinuierlich zur negativen Magnetostriktion des Nickels ab. Bei etwa 81 Proz. *Ni* ändert die Magnetostriktion ihr Vorzeichen, ist also $= O$ (R. Vogel (9); A. Schulze (7); H. Masumoto und S. Nava (33); A. Schulze (40); L. W. Mc Keehan und P. P. Cioffi (55); K. Honda und K. Kido (56)).

Im Eisen—Kobalt-System weichen die Meßergebnisse der einzelnen Forscher stark voneinander ab. Als sicher geht hieraus hervor, daß die Magnetostriktion von Eisen ausgehend zuerst ansteigt zu einem Maximum, um dann im heterogenen $(\alpha + \gamma)$-Gebiet stark abzufallen. Etwa bei der A_3-Umwandlung findet der Vorzeichenwechsel statt und von da ab fällt die Magnetostriktion weiter nach der negativen des Kobalts ab. Im α-Gebiet findet K. Honda Maxima bei 40 und 69 Proz. *Co*, wobei sich das letztere mit wachsender magnetisierender Kraft nach Eisen hin verschiebt. A. Schulze gibt Maxima bei 33, 42, 52 und 69 Proz. *Co* an (A. Schulze (7); K. Honda u. K. Kido (56); K. Honda u. A. Shimuzu (57)).

Noch stärker weichen die Messungen im Nickel—Kobalt-System voneinander ab, da wahrscheinlich die Verschiedenheit des Kohlenstoffgehaltes erhebliche Fälschungen bewirkt. Es kann nur gesagt werden, daß die Magnetostriktion in der Nickel—Kobalt-Reihe negativ bleibt (A. Schulze (7); H. Masumoto (26)).

Zusammenfassung.

Im ternären Legierungssystem Eisen—Nickel—Kobalt sind drei Gebiete verschiedener Kristallstruktur, die jeweils eine fest homogene Lösung bilden, zu unterscheiden (Fig. 5): Gebiet I mit raumzentriert kubischem Gitter (α-Modifikation); Gebiet II mit flächenzentriert kubischem Gitter (γ-Modifikation); und Gebiet III mit dicht gepacktem hexagonalen Gitter (H-Modifikation). Das α- und γ-Gebiet wird durch ein teilweise sehr breites, das γ- und H-Gebiet nur durch ein schmales heterogenes Mischkristallgebiet getrennt.

In den einzelnen genannten Gebieten verschiedener Struktur treten folgende Legierungszusammensetzungen durch besonders charakteristische Eigenschaften hervor:

α-Gebiet: Die höchste, bis jetzt erreichte magnetische Sättigungsintensität von $B =$ über 25000 Gauß (Eisen 22—23000 Gauß) aller bekannten ferromagnetischen Legierungen wird von einer Eisen—Kobalt-Legierung mit etwa 35 Proz. *Co* erreicht (Fig. 18). Dieses Maximum fällt bei Nickelzusatz kontinuierlich, ohne besonderes Hervortreten der A_3-Umwandlung oder des heterogenen wie auch des hexagonalen Gebietes, zum Sättigungswert des reinen Nickels ($B =$ etwa 8000 Gauß) ab. Das Maximum ist sehr flach, so daß die Annahme einer Verbindung (Fe_2Co) nicht gerechtfertigt erscheint. Auch zeigt diese Stelle des Systems Eisen—Kobalt weder im Strukturdiagramm, noch im Verlauf der verschiedenen spezifischen Eigenschaften irgendwelche Besonderheiten. Nur der Torsionsmodul zeigt hier in Abhängigkeit von der Eisen—Kobalt-Zusammensetzung ein Maximum. Da dieses aber mit dem Maximum des Elastizitätsmoduls, bei dem sonstigen streng parallelen Verlauf beider Größen, nicht übereinstimmt, so dürfte diesem Maximum des Torsionsmoduls keine Bedeutung beizumessen sein. Nach H. Masumoto und S. Nava (33) hat bei 33 proz. Kobalt—Eisen der Koeffizient der thermischen Ausdehnung (Fig. 11) ein kleines Maximum; Messungen von A. Schulze (30) bestätigen dies jedoch nicht.

Eine Legierung von 50 Proz. *Fe* und 50 Proz. *Co* zeichnet sich durch ihre leichte Magnetisierbarkeit (Fig. 18) aus.

Die elektrische und thermische Leitfähigkeit ist auf der Eisen—Kobalt-Achse zwischen 45 und 70 Proz. *Co* höher als die der beiden Ausgangsmetalle. Der Verfasser sucht diese Erscheinung durch die Annahme von α-Kobalt zu erklären.

γ-Gebiet: Sehr hohe Permeabilitäten und damit sehr kleine Hystereseverluste werden von Eisen—Nickel-Legierungen mit etwa 78,5 Proz. *Ni* erreicht (Permalloy). In der Nähe dieser Stelle im binären System Eisen-Nickel treten auch andere spezifische Eigenschaften in ihrem Verlauf in Abhängigkeit von der Legierungszusammensetzung besonders hervor. Die Magnetostriktion, die bei Eisen positiv, bei Nickel negativ ist, ändert bei etwa 81 Proz. *Ni* ihr Vorzeichen. Es treten also bei Magnetisierung keine inneren Spannungen auf, da die Magnetostriktion Null ist. Der Torsions- und Elastizitätsmodul hat bei etwa 82 Proz. *Ni* ein Maximum, während die spezifische Wärme an der gleichen Stelle ein Minimum aufweist.

Zu der beschriebenen Stelle steht im Gegensatz das Gebiet nahe der A_3-Umwandlung, also bei etwa 30 Proz. *Ni*. Hier hat der Torsions- und Elastizitätsmodul ein ausgesprochenes Minimum und die spezifische Wärme ein Maximum. Ferner liegt das steile Maximum des spezifischen elektrischen Widerstandes an dieser Stelle; das Minimum des thermischen Ausdehnungskoeffizienten

(Invar) ist jedoch etwas nach Nickel zu verschoben (bei etwa 36 Proz. *Ni*).

Verschiedene Legierungen des γ-Gebietes zeigen bei bestimmter Wärmevorbehandlung merkwürdige „eingeschnürte" Hystereseschleifen (Perminvare). Als Ursache hierfür werden zwei verschiedenartige Komponenten in der kristallinen Struktur, deren Existenz aber noch nicht nachgewiesen werden konnte, angenommen.

$\alpha + \gamma$-Gebiet: Die Legierungen des heterogenen Gebietes werden in der Eisen—Nickel-Reihe vielfach als irreversible Legierungen bezeichnet. Das heterogene Gebiet ist hinsichtlich der Temperaturachse (Fig. 1) so breit, daß nach irgendeiner Erhitzung meist andere kristallographische Verhältnisse vorliegen und hierdurch fast alle Eigenschaften Veränderungen erfahren haben. Dieses Verhalten trifft natürlich auf das ganze ($\alpha + \gamma$)-Gebiet im ternären System zu. Alle Eigenschaften dieser Legierungen sind daher sehr stark von der Temperaturvorbehandlung abhängig.

Das heterogene Gebiet tritt im Verlauf verschiedener Eigenschaften in Abhängigkeit von der Zusammensetzung im ternären System sehr deutlich in Erscheinung. Die Legierungen sind, in Übereinstimmung mit der Theorie von Kußmann und Scharnow, in mechanischer wie auch magnetischer Beziehung sehr hart, wie aus den Figuren 15, 16, 17, 19, 22, 23 und 24 zu ersehen ist.

Die A_3-Umwandlung tritt im ternären System in einem Maximumsrücken des spezifischen elektrischen Widerstandes zutage; wahrscheinlich weist auch der Torsions- und Elastizitätsmodul längs der A_3-Umwandlung ein Minimum auf.

H-Gebiet: Im Gebiete des hexagonalen Gitters treten die Legierungen bei etwa 95 Proz. *Co* und 5 Proz. *Ni* dadurch besonders in Erscheinung, als die mechanische Härte hier ein Maximum und die Magnetisierbarkeit bei kleinen Feldern ebenfalls ein Maximum aufweist. Das Material ist demnach mechanisch sehr hart, in magnetischer Hinsicht, wenigstens im Vergleich zu den übrigen Legierungen des hexagonalen Gebietes, verhältnismäßig weich.

Das heterogene ($\gamma + H$)-Gebiet ist sehr schmal und tritt daher in den bisherigen Untersuchungen bei keiner Eigenschaft besonders hervor.

Im ganzen ternären System Eisen—Nickel—Kobalt schließen verschiedene Verfasser auf Grund des Verlaufes einzelner spezifischer Eigenschaften auf die Existenz von Verbindungen. Der Vergleich mehrerer spezifischer Eigenschaften und das Strukturdiagramm lassen diese Schlüsse jedoch nicht zu.

Literaturverzeichnis.

1) A. Westgren u. A. E. Lindh, Zeitschr. f. phys. Chem. **98**, 181, 1921.
2) A. Heinzel, Zeitschr. f. techn. Phys. **10**, 136, 1929.
3) H. Masumoto, Sci. Rep. **18**, 195, 1929.
4) H. Masumoto, Sci. Rep. **15**, 449, 1926.
5) A. Schulze, Zeitschr. f. techn. Phys. **8**, 365, 1927.
6) R. Ruer u. E. Schütz, Metallurgie **7**, 415, 1910.
7) A. Schulze, Zeitschr. f. techn. Phys. **8**, 495, 1927.
8) J. Würschmidt, Kruppsche Monatshefte S. 182, 226, 241, 1925.
9) R. Vogel, Zeitschr. f. anorg. allg. Chem. **142**, 193, 1925.
10) M. Peschard, Compt. rend. **180**, 1477 u. 1836, 1925.
11) F. Osmond u. G. Cartaud, Revue de Métallurgie I, 69, 1904.
12) D. Hanson u. H. Hanson, Journ. Iron Steel Inst. **102**, 39, 1920.
13) D. Hanson u. J. Freemann, Journ. Iron Steel Inst. **107**, 301, 1923.
14) Mary R. Andrews, Phys. Rev. **18**, 245, 1921.
15) T. Kasé, Sci. Rep. **16**, 491, 1927.
16) T. Kasé, Sci. Rep. **14**, 173, 1925.
17) P. Weiß, Trans. Faraday Soc. **8**, 149, 1912.
18) R. Ruer u. K. Kaneko, Ferrum **11**, 34, 1913.
19) W. Guertler u. G. Tammann, Zeitschr. f. anorg. allg. Chem. **45**, 217, 1905.
20) A. Preuß, Diss. Zürich 1912.
21) A. Schulze, Zeitschr. f. techn. Phys. **8**, 423, 1927.
22) W. Guertler u. G. Tammann, Zeitschr. f. anorg. allg. Chem. **42**, 353, 1904.
23) R. Ruer u. K. Kaneko, Metallurgie **9**, 419, 1912.
24) K. Honda, Sci. Rep. **7**, 59, 1918.
25) F. Ribbeck, Zeitschr. f. Phys. **38**, 772, 1926; **38**, 887, 1926; **39**, 787, 1926.
26) H. Masumoto, Sci. Rep. **16**, 321, 1927.
27) G. W. Elmen, Bell Telephone Lab. June 1929.
28) K. Honda, Sci. Rep. **8**, 51, 1919.
29) K. Honda u. S. Miura, Sci. Rep. **16**, 745, 1927.
30) A. Schulze, Physik. Zeitschr. **28**, 669, 1927.
31) C. E. Guillaume, Proc. Phys. Soc. London **32**, 374, 1920.
32) K. Honda u. Y. Okubo, Sci. Rep. **13**, 101, 1924.
33) H. Masumoto u. S. Nava, Sci. Rep. **16**, 333, 1927.
34) M. Kawakami, Sci. Rep. **15**, 251, 1926.
35) A. Osawa, Sci. Rep. **15**, 387, 1926.
36) A. Osawa, Sci. Rep. **15**, 619, 1926.
37) K. Honda, Sci. Rep. **8**, 59, 1919.
38) W. T. Griffiths, Electrician (London) **97**, 612, 1926.
39) F. Hegg, Arch. de Sci. **29**, 592, 1910; **30**, 15, 1910.
40) A. Schulze, Zeitschr. f. Phys. **50**, 448, 1928.
41) G. Tammann, Zeitschr. f. phys. Chem. **65**, 73, 1909.
42) O. Bloch, Arch. d. Sci. **33**, 293, 1912.
43) E. Freese, Jahrbuch f. drahtl. Telegraphie **27**, 86, 1926.
44) S. Kaya u. A. Kußmann, Naturwissenschaften **17**, 995, 1929.
45) K. Lewkonja, Zeitschr. f. anorg. Chem. **59**, 293, 1908.
46) K. Honda, Ann. d. Phys. **32**, 1003, 1910.
47) E. Gumlich, Zeitschr. f. techn. Phys. **6**, 670, 1925.

48) F. Stäblein, Zeitschr. f. techn. Phys. **9**, 145, 1928.
49) T. D. Jensen, Journ. A. I. E. E. **29**, 396, 1920.
50) T. D. Jensen, Journ. Franklin Inst. **199**, 333, 1925.
51) H. D. Arnold u. G. W. Elmen, Journ. Franklin Inst. **195**, 621, 1923.
52) G. W. Elmen, Journ. Franklin Inst. **206**, Nr. 3, Sept. 1928.
53) K. Zschiesche, Zeitschr. f. Phys. **11**, 201, 1922.
54) O. E. Buckley u. L. W. McKeehan, Bell Telephone Lab. Sept. 1925; Phys. Rev. **26**, 261, 1925.
55) L. W. McKeehan u. P. P. Cioffi, Bell Telephone Lab. Aug. 1926; Phys. Rev. **28**, 146, 1926.
56) K. Honda u. K. Kido, Sci. Rep. **9**, 221, 1920.
57) K. Honda u. A. Shimuzu, Phil. Mag. **6**, 392, 1903.
58) U. Meyer, Physik. Zeitschr. **28**, 919, 1927.
59) Gumlich, Steinhaus, Kußmann und Scharnow, E.N.T. **5**, 83, 1928.

(Eingegangen 30. Mai 1930.)

BESPRECHUNGEN.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil I: Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen (Teubners mathematische Leitfäden, Band 21). 3. Aufl. Kl.-8°. VII und 189 S. Mit 155 Fig. Leipzig und Berlin 1929. B. G. Teubner. Kart. RM 6.—.

Wie bereits die früheren Auflagen, so möchten wir auch die vorliegende zur Einführung in die Differential- und Integralrechnung wärmstens empfehlen. Gegenüber der 2. Aufl. ist ein kurzer Abschnitt über Maxima und Minima mit Nebenbedingungen bzw. über geometrische Momente ebener Flächenstücke hinzugekommen. Haupt.

Berichtigung.

Durch ein Versehen beim Druck wurden in der Arbeit: „Die Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit ferromagnetischer Stoffe in longitudinalen Magnetfeldern von O. Stierstadt, Göttingen in Nr. 12 dieser Zeitschr. S. 561 bis 574 die erklärenden Unterschriften der Fig. 4—20 fortgelassen. Nachgetragen seien hier die Unterschriften derjenigen Abbildungen, deren Bedeutung aus dem Text nicht ohne weiteres klar wird:

Fig. 4. Widerstandsänderungen von Eisen nach unvollständiger Entmagnetisierung.
Fig. 5. Widerstandsänderungen von Nickel nach unvollständiger Entmagnetisierung.
Fig. 6. Widerstandsänderung von Nickel. (Entnommen aus der Arbeit von F. Vilbig.)
Fig. 7a. Widerstandsänderung von Eisen.
Fig. 7b. Widerstandsänderung von Nickel.
Fig. 11. Widerstandshysteresiskurve von Nickel bei kleinen Feldstärken.
Fig. 12. Widerstandshysteresiskurve von Nickel bei großen Feldstärken.
Fig. 13. Widerstandshysteresiskurve eines hartgezogenen Eisendrahtes.
Fig. 14. Widerstandshysteresiskurve eines geglühten Eisendrahtes.
Fig. 19. Nickel; $\frac{dw}{w_0} = c\,\mathfrak{B}^x$.
Fig. 20. Eisen; $\frac{dw}{w_0} = c\,\mathfrak{B}^x$.

Ferner muß lauten Formel (8), S. 563:

$$\frac{dw}{w_0} = \frac{1 + \frac{b}{Ba}\left[B + a + b - \frac{(B+b)^2}{C}\right]}{\int \frac{b}{i_0\,C} - 1}$$

statt:

$$\frac{dw}{w_0} = \frac{1 + \frac{b}{Ba}\left[B + a + b - \frac{(B+b)^2}{t}\right]}{\int \frac{b}{i_0\,C} - 1}$$

S. 569 links, Zeile 6 v. o.: Daß die ... statt: Da die ...

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Wien Dr. Otto Redlich für Physikalische Chemie, an der Universität München Dr. Hans Bethe und Dr. Karl Bechert für Physik.

Ernannt: Der Privatdozent für organische Chemie an der Universität Budapest Dr. Ferdinand Mauthner und der Privatdozent für physikalische Chemie an der Universität Berlin Dr. Paul Günther zu a. o. Professoren an der gleichen Hochschule, der ord. Professor der Astronomie an der Deutschen Universität Prag Dr. Adalbert Prey zum ord. Professor für theoretische Physik an der Universität Wien, der ord. Professor der Technischen Hochschule Zürich Dr. Hermann Weyl zum ord. Professor der Mathematik (an Stelle von Professor David Hilbert) an der Universität Göttingen, der Privatdozent an der Universität Münster Dr. Heinrich Danneel zum a. o. Professor für technische Chemie ebenda, der Privatdozent an der Universität Köln Dr. Hans Falkenhagen zum a. o. Professor für theoretische Physik an derselben Hochschule.

Gestorben: Der ehemalige Präsident des American Institute of Chemical Engineers Dr. Charles Francis McKenna, der Honorarprofessor der Astronomie an der Universität Göttingen Dr. Leopold Armbronn.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.